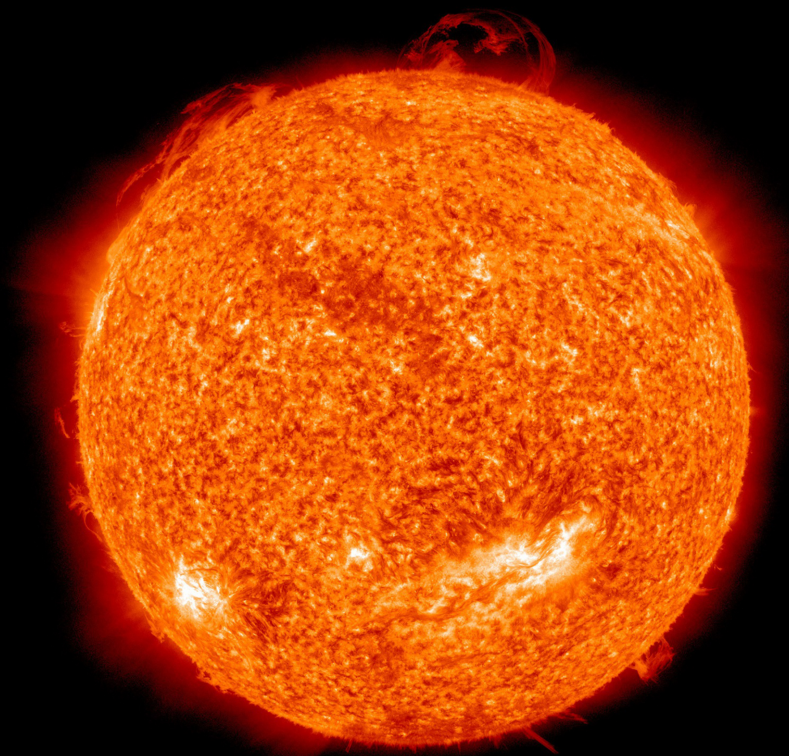


ВНУТРИ ЗВЁЗД

Первое издание на русском языке,
переведённое с 3-го английского издания

Л. Борисова и Д. Рабунский



Внутри звёзд

Теория внутреннего строения звёзд
и источников звёздной энергии
на основе общей теории относительности

Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский

Первое издание на русском языке,
переведённое с 3-го, переработанного
английского издания 2023 г.

Первое англ. издание опубликовано в 2013 г.
Второе издание выпущено в 2014 г.



New Scientific Frontiers
London, 2023

Аннотация: — В этой книге вводится математическая теория внутреннего строения звёзд и источников звёздной энергии, построенная методами общей теории относительности и сводящаяся к модели жидких звёзд. Такая звезда однородна внутри, с крошечным ядром в центре, которое отделено поверхностью коллапса с радиусом, соответствующим массе звезды. Хотя почти вся масса звезды находится вне ядра (ядро не является чёрной дырой), сила гравитации приближается к бесконечности на поверхности ядра из-за разрыва внутреннего пространства поля звезды. Такой сверхсильной гравитации достаточно для передачи необходимой кинетической энергии атомным ядрам звёздного вещества, чтобы происходил процесс термоядерного синтеза: крошечное ядро каждой звезды — это её светящееся “внутреннее солнце”, а произведённая звёздная энергия затем передаётся на поверхность звезды за счёт теплопроводности. Введена новая классификация звёзд по пространственному разрыву их полей: рассматриваются обычные звёзды (в диапазоне от карликов до сверхгигантов), звёзды Вольфа-Райе, нейтронные звёзды (и пульсары) и чёрные дыры. Введённая жидкостная модель согласуется с новыми наблюдательными данными в пользу состояния конденсированной материи внутри звёзд; в частности, с тем, что Солнце состоит из высокотемпературного жидкометаллического водорода.

© Л. Б. Борисова и Д. Д. Рабунский 2013, 2014, 2023

Соглашение об авторском праве: — Все права защищены. Эта книга опубликована и распространяется в соответствии с “Будапештской инициативой открытого доступа”. Это означает, что электронное копирование, печать и распространение этой книги для некоммерческого, академического или индивидуального использования может осуществляться любым пользователем без разрешения и без оплаты. Любая часть этой книги, цитируемая или используемая каким-либо образом в других публикациях, должна содержать ссылку на эту публикацию. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме (включая хранение на любом носителе) для коммерческого использования без предварительного разрешения владельца авторских прав. Запросы на разрешение воспроизведения любой части этой книги для коммерческого использования должны быть адресованы авторам. Авторы сохраняют за собой право использовать эту книгу целиком или её часть в любых других публикациях и любым способом, который они сочтут нужным. Настоящее Соглашение об авторском праве остаётся в силе, даже если Авторы передадут авторские права на эту книгу другому лицу. Настоящим Авторы ограждают Издателя от любых претензий или обязательств, касающихся авторства, публикации или распространения этой книги.

Эта книга была набрана и сверстана с использованием настольной издательской системы L^AT_EX.

New Scientific Frontiers — издательство, зарегистрированное в Nielsen Book Services Ltd., Уокинг, графство Суррей, Великобритания.

ISBN: 978-1-7392930-7-9

Опубликовано в Великобритании.

Содержание

Предисловие	6
Вступление	9
Глава 1 Постановка задачи	
1.1 Новая теория внутреннего строения звёзд	13
1.2 Моделирование звезды методами общей теории относительности	17
1.3 Физические наблюдаемые величины	26
Глава 2 Обычные звёзды и Солнце	
2.1 Введение метрики пространства обычной звезды. Уравнения Эйнштейна, удовлетворяющие этой метрике	45
2.2 Внешний разрыв пространства поля Солнца совпадает с поясом астероидов	58
2.3 Геометрический смысл разрыва внешнего пространства звезды	65
2.4 Сила гравитации, действующая внутри жидкой звезды ..	68
2.5 Решение уравнений закона сохранения: давление и плотность внутри звёзд	70
2.6 Механизм генерации звёздной энергии согласно жидкостной модели звёзд и диаграмме масса-светимость	72
2.7 Заключение	79
Глава 3 Описание обычных звёзд	
3.1 Постановка задачи. Метрика внутреннего пространства обычной невращающейся звезды	81
3.2 Уравнения Эйнштейна во внутреннем поле обычной невращающейся звезды	83
3.3 Метрика внутреннего пространства обычной вращающейся звезды	86

3.4	Уравнения Эйнштейна во внутреннем поле обычной вращающейся звезды	91
3.5	Стационарное безвихревое электромагнитное поле обычной вращающейся звезды	95
3.6	Решение уравнений Максвелла в безвихревом электромагнитном поле обычной вращающейся звезды	101
3.7	Решение уравнений Максвелла в вихревом электромагнитном поле обычной вращающейся звезды	104
3.8	Геометризация электромагнитного поля для обычной вращающейся звезды	107
3.9	Заключение	110
Глава 4 Звёздный ветер		
4.1	Условие второй космической скорости для звезды	112
4.2	Светоподобные частицы внутри обычной звезды	117
4.3	Частицы звёздного вещества внутри обычной звезды	123
4.4	Заключение	130
Глава 5 Нейтронные звёзды и пульсары		
5.1	Введение метрики пространства вращающейся нейтронной звезды	133
5.2	Уравнения Эйнштейна и уравнения закона сохранения, удовлетворяющие этой метрике	136
5.3	Введение электромагнитного поля	141
5.4	Распределение магнитного поля пульсара	145
5.5	Частота и напряжённость магнитного поля пульсара	148
5.6	Решение уравнений Максвелла в стационарном безвихревом электромагнитном поле пульсара	150
5.7	Решение уравнений Максвелла в стационарном вихревом электромагнитном поле пульсара	158
5.8	Геометризация электромагнитного поля пульсара	163
5.9	Границы физического пространства пульсара	166
5.10	Заключение	168
Глава 6 Чёрные дыры		
6.1	Невращающиеся жидкие коллапсары	170
6.2	Вселенная как огромный жидкий коллапсар	173

6.3	Давление и плотность внутри жидких коллапсаров	175
6.4	Внутренние силы гравитации. Внутреннее красное смещение	176
6.5	Состояние сколлапсировавшего жидкого вещества	178
6.6	Время течёт в обратном направлении внутри коллапсаров	182
6.7	Пограничные условия в жидком коллапсаре	183
6.8	Вращающиеся жидкие коллапсары	185
6.9	Заключение	186
	Литература	190

Предисловие

Учёный часто сталкивается с устоявшимися представлениями, которые когда-то были предметом споров, иногда полемики. Часто мы используем эти идеи, не зная ни их исторического развития, ни предположений, на которых они основаны. Мы редко останавливаемся, чтобы обдумать обоснованность устоявшейся идеи. Это неудивительно, поскольку именно так мы строим наше здание физических теорий, “стоя на плечах гигантов”, перефразируя Исаака Ньютона.

Тем не менее, устоявшиеся идеи и теории необходимо подвергать сомнению и пересматривать, когда становятся доступными новые данные или новые теории, которые противоречат им или проливают на них новый свет. Нам не нужно бояться новой информации, которая может опровергнуть принятые идеи. Ведь именно так возникают новые парадигмы и достигается прогресс.

Вопрос о том, являются ли звёзды газообразными или жидкими, — это дискуссия, на которую не обращает внимания большинство учёных. И всё же это было предметом ожесточённых дискуссий в конце 19-го и начале 20-го веков, когда известные физики занимали позиции по обе стороны этой баррикады. Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский кратко излагают историю этих дебатов и историю того, как они были втянуты в решение этой научной проблемы.

Недавние свидетельства жидкой природы звёзд, в частности обширные исследования, проведённые Пьером-Мари Робиталем, предложившим модель Солнца, состоящего из жидкометаллического водорода*, заставляют нас вернуться к этому вопросу. Интересно, что звёздная плазма моделируется с использованием магнитогидродинамики, т.е. динамики магнитной жидкости, комбинации

*Robitaille P.-M. A high temperature liquid plasma model of the Sun. *Progress in Physics*, 2007, vol. 3, no. 1, 70–81.

Масквелловских уравнений электромагнетизма и уравнений гидромеханики Навье-Стокса*. Магнитогидродинамика также используется для моделирования жидких металлов. Это указывает на то, что теория жидких звёзд весьма правдоподобна для объяснения солнечных и звёздных астрофизических данных.

Мой интерес к этой области исследований проистекает из моих астрофизических исследований звёздных атмосфер звёзд Вольфа-Райе, которые я проводил на физическом факультете университета Оттавы для моей диссертации на тему “Лазерное действие в плазме C IV, N V и O VI, охлаждаемой адиабатическим расширением”. Звёзды Вольфа-Райе демонстрируют потерю массы и расширение звёздной атмосферы. Это приводит к инверсии некоторых атомных переходов за счёт быстрого охлаждения расширяющейся плазмы и рекомбинации свободных электронов в более высокие возбуждённые состояния ионов, а также к лазерному воздействию на соответствующих линиях излучения. Этот физический механизм был предложен в качестве объяснения наиболее выдающихся спектральных линий, наблюдаемых в спектрах звёзд Вольфа-Райе.

В этой книге Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский предлагают общую релятивистскую теорию внутреннего строения жидких звёзд — модель, которой до сих пор не было. Они получили эту модель, используя математический формализм, впервые введённый Абрамом Леонидовичем Зельмановым для вычисления физически наблюдаемых величин в четырёхмерном псевдоримановом пространстве, известный как “теория хронометрических инвариантов”. Этот математический аппарат позволяет вычислять физически наблюдаемые (хронометрически инвариантные) тензоры любого ранга на основе операторов проецирования на линию времени и пространственное сечение наблюдателя. Основная идея заключается в том, что физически наблюдаемые величины, регистрируемые наблюдателем, должны быть результатом проекции четырёхмерных величин на линию времени и на пространственное сечение (локальное трёхмерное пространство) наблюдателя.

Этот анализ позволяет им предложить классификацию звёзд, основанную на трёх основных типах: обычные звёзды (покрыва-

*Tajima T. and Shibata K. *Plasma Astrophysics*. Perseus, Cambridge, 2002; Kulrud R. M. *Plasma Physics for Astrophysics*. Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.

ющие диапазон от белых карликов до сверхгигантов), подтипом которых являются звёзды Вольфа-Райе, нейтронные звёзды и пульсары, а также коллапсары (чёрные дыры). Их теория также даёт модель внутреннего строения нашей Солнечной системы. Она объясняет наличие пояса астероидов, общую структуру планет внутри и вне этой орбиты и излучение энергии планетой Юпитер.

Окончательным тестом любой теории звёздной структуры является соотношение звёздной массы и светимости, которое является основным эмпирическим соотношением наблюдательной астрофизики. Используя свою теорию, авторы могут рассчитать давление внутри звёзд как функцию радиуса, включая центральное давление. Как указывают авторы, температура несжимаемой жидкой звезды не зависит от давления, а только от источника звёздной энергии (в отличие, в частности, от газа, так как он задаётся уравнением состояния идеального газа). Авторы сопоставляют расчётное производство энергии предполагаемого механизма термоядерного синтеза лёгких атомных ядер в гильбертовом ядре (“внутреннем солнце”) звёзд с эмпирическим соотношением массы и светимости наблюдательной астрофизики, чтобы определить плотность жидкого звёздного вещества в гильбертовом ядре.

Пульсары и нейтронные звёзды оказались звёздами, физический радиус которых близок к радиусу их гильбертова ядра. Они моделируются путём введения в теорию электромагнитного поля, обусловленного их вращением и гравитацией. Установлено, что электромагнитное излучение исходит только от полюсов этих звёзд вдоль оси их вращения.

Эта книга представляет собой солидный вклад в наше понимание строения звёзд, сделанный методами общей теории относительности. Она даёт релятивистскую основу для теории жидких звёзд. Она продвигает новые идеи о строении звёзд и планетных систем и предлагает новый подход к строению звёзд и их эволюции, который должен помочь нам лучше понять звёздную астрофизику.

Оттава, 2 сентября 2013

Пьер Миллет

Астрофизические исследования
звёздных атмосфер, физический
факультет университета Оттавы

Вступление

Три десятилетия назад, в 1983 году, я начал изучать историю происхождения теории газовых звёзд. Меня вдохновил на это профессор Кирилл Петрович Станюкович (1916–1989), выдающийся учёный в области газовой динамики и общей теории относительности, с которым мы с Ларисой были в дружеских отношениях на протяжении многих лет. Станюкович рассказал мне, что вскоре после того, как Ганс Бете предположил, что термоядерный синтез является источником энергии звёзд, в 1939 году астрофизики начали попытки адаптировать газовую модель звёзд к термоядерному синтезу. Во многих случаях их предположения были настолько искусственными по отношению к самой газовой динамике, что только отсутствие другого предположения могло бы оправдать их модели. Станюкович также рассказал о многих очевидных доказательствах газовой динамики, которые по сути противоречат газовой модели звёзд.

Затем я прочитал статьи-первоисточники по теории газовых звёзд, опубликованные в начале 20-го века. Я сразу обнаружил, что “ядро” этой теории, состоящее из уравнений механического и теплового равновесия внутри звёзд, не зависит от того, состоят ли звёзды из газа или из чего-то другого. Только позже, вводя уравнение состояния идеального газа в эти уравнения, теория даёт так называемые газовые звёзды и всё разнообразие газовых моделей.

Затем мы были увлечены другими исследованиями, в основном по общей теории относительности, так что астрофизика выпала из сферы нашего внимания почти на 25 лет.

Летом 2007 года к нам в первый раз приехал в гости профессор Пьер-Мари Робиталь. Работая в Университете штата Огайо, Пьер на протяжении многих лет проводил глубокие экспериментальные исследования в области теплофизики и ядерного магнитного резонанса (который генерирует микроволновое излучение). Он обратил

наше внимание на новые астрофизические свидетельства того, что Солнце и звёзды жидкие. Эти свидетельства появились лишь в последнее десятилетие. Как-то раз, ярким днём во время прогулки со мной в ближайшем парке Пьер указал на диск Солнца в небе и произнёс: “Смотрите, это — жидкая сфера.” Однако недостаток математических обоснований в то лето не позволил нам построить строгую математическую теорию жидких звёзд.

Несколько месяцев спустя, в том же 2007 году, Лариса и я взялись перевести на английский язык две классические статьи по общей теории относительности, написанные в 1916 году Карлом Шварцшильдом. В одной из этих работ он ввёл метрику пространства сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, что принесло ему затем большую посмертную известность. Мы знали, что метрика жидкой сферы Шварцшильда не может быть использована в качестве модели для жидких звёзд. Это связано с некоторым конкретным ограничением, содержащимся в этой метрике. Однако сразу после прочтения первоначального варианта математического вывода этой метрики, опубликованного в его статье 1916 г., мы обнаружили, что это ограничение было введено им искусственно, чтобы сделать звёздное гравитационное поле непрерывным (не содержащим разрыва). Если бы удалось вывести настоящую метрику жидкой сферы, свободную от каких-либо искусственных ограничений, наложенных на геометрию пространства, мы смогли бы построить математическую теорию жидких звёзд.

Путь вперёд наконец был найден: теперь мы знали, что делать дальше. Для проверки Лариса сразу же вывела истинную метрику жидкой сферы, затем вычислила некоторые приложения для Солнца. Она обнаружила, что, когда Солнце представлено в виде жидкой сферы, его гравитационное поле имеет разрыв, соответствующий максимальной концентрации вещества в поясе астероидов; таким образом, разрыв пространства препятствует тому, чтобы вещество сформировалось в планету на этой орбите. Поэтому мы убедились, что находимся на правильном пути. (Дэвид Джонс, редактор *New Scientist*, писал в 1981 г.: “Как известно, все основные научные открытия были сделаны или в ходе работы над другими проблемами или в результате случайных наблюдений.”)

Такова эта история вкратце. Весной 2013 г. мы завершили математическую теорию жидких звёзд. Эта теория даёт три основные

жидкостные модели в соответствии с общей теорией относительности, которые вместе охватывают все известные типы звёздных объектов в самом широком диапазоне: от сверхгигантов до нейтронных звёзд и чёрных дыр. В этой книге мы излагаем все основные элементы этой теории, за исключением конкретных деталей механизма звёздной энергии (это остаётся вне темы книги, которая в основном посвящена внутреннему строению звёзд).

Пушино, 6 августа 2013

Д. Д. Рабунский

Благодарности

Лариса и я хотели бы поблагодарить Пьера-Мари Робиталья (Огайо, США) за многодневные научные обсуждения и дружескую поддержку во время двух его длительных визитов к нам через океан и позже. Мы признательны ему более всего. Его вклад поистине неоценим.

Мы также очень признательны Пьеру А. Миллету (Оттава, Канада), который, будучи экспертом как в звёздной астрофизике, так и в общей теории относительности, внимательно прочитал черновик этой книги и внёс полезные предложения.

Мы также хотели бы выразить нашу искреннюю благодарность Индрану Суэндро и его жене Сюзанне Биллхарц, США. Наше общее обсуждение этой книги и их помощь в редактировании сделала книгу гораздо лучше, чем она была в первом черновике.

Мы также признательны Патрику Маркэ (Калé, Франция): наши дискуссии с ним по общей теории относительности всегда дают нам много нового, в том числе импульс для новых научных исследований.

Отдельная признательность — Анатолию Васильевичу Белякову (Тверская Карелия, Россия), который взял на себя перевод этой книги на русский язык.

В 3-м английском издании, с которого Беляков сделал этот русский перевод, мы полностью переработали весь текст книги и внесли множество необходимых исправлений.

Пушино, 15 февраля 2023

Дмитрий Рабунский

1.1 Новая теория внутреннего строения звёзд

В этой книге мы вводим новую математическую теорию внутреннего строения звёзд и источников звёздной энергии. Теория основана на общем представлении о звезде и её поле согласно общей теории относительности.

Это — альтернатива традиционной теории звёзд, введённой в 1920-х годах Артуром Эддингтоном [1] и другими в рамках классической механики и термодинамики.

Как известно, традиционная теория привела к *модели газообразных звёзд*: звёзды рассматриваются как газообразные сферы, состоящие в основном из водорода и очень неоднородной внутренней части, так что водород чрезвычайно горячей и плотной центральной области используется как топливо в процессе генерирования звёздной энергии. Предполагается, вслед за Гансом Бете [2], что этот экзотермический процесс представляет собой термоядерный синтез, производящий гелий из водорода. Две другие альтернативные газовые модели отличаются от теории Эддингтона в некоторых деталях. Эдвард Милн [3] предположил наличие двух (или более) разных состояний материи внутри звезды. Николай Козырев [4] пришёл к своеобразной модели с низкой плотностью и температурой внутри звёзд и неядерным источником звёздной энергии.

Другая теория внутреннего строения звёзд получила широкое распространение в 1920–1930-х годах благодаря Джеймсу Джинсу [5, 6]. Это — *модель жидких звёзд*. Публичная дискуссия между Джинсом, защищавшим жидкостную модель, и Эддингтоном, последователем газовой модели, была зафиксирована в десятках коротких сообщений, опубликованных ими в научных журналах. Действительно, Эддингтон в конце концов победил. Несмотря на

множество астрофизических свидетельств того, что звёзды жидкие, теория Джинса не имела прочной математической основы. Его теория была основана на анализе наблюдений и аргументах, а не на математической модели. Напротив, теория газообразных звёзд была математически хорошо обоснована Эддингтоном. В частности, математическая модель газообразных звёзд даёт теоретический вывод соотношения масса-светимость, которое является одним из основных соотношений наблюдательной астрофизики*. Это было “козырной картой” газовой модели: так как газовая модель предсказала соотношение масса-светимость, был сделан вывод, что эта теория верна в целом, а все её несоответствия наблюдательному анализу являются лишь некоторыми “трудностями”, которые необходимо разрешить в будущем. Таким образом, модель газообразных звёзд стала общепринятой моделью на десятилетия вперёд, вплоть до настоящего времени.

Теперь мы должны сделать важное замечание. Как известно, ядро математической теории внутреннего строения звёзд составляют два уравнения: уравнение механического равновесия и уравнение теплового равновесия. Механическое равновесие означает, что вес любой единицы объёма звёздного вещества приводится в равновесие давлением изнутри звезды. Тепловое равновесие (энергетический баланс) означает, что энергия, производимая в любой единице объёма звёздного вещества, приводится в равновесие потоком энергии (излучением, конвекцией или теплопроводностью) изнутри звезды к её поверхности. Эти два основных уравнения теории взяты из общей физики, и они *не зависят* от того, состоят ли звёзды из газа, жидкости или чего-то ещё. Только затем, вводя уравнение состояния идеального газа (и много других частных предположений) в основные уравнения, традиционная теория приводит к газообразным звёздам и другим выводам, включая соотношение масса-светимость.

Теория жидких звёзд Джинса не может следовать этому пути. Уравнение состояния идеальной жидкости, данное классической физикой, настолько просто, что не содержит характеристик звёздной материи, необходимых для дальнейших выводов с помощью

* Наиболее детальный вывод соотношения масса-светимость в рамках модели газовых звёзд приведён в части I статьи Н. А. Козырева [4].

уравнений равновесия.

Вместо всех этих соображений классической механики и термодинамики мы предлагаем совершенно иной подход к проблеме. Он основан на рассмотрении звезды и её поля согласно общей теории относительности. Мы рассматриваем жидкие звёзды: это соответствует некоторым новым наблюдательным данным о состоянии конденсированного вещества внутри звёзд; в частности — данным о том, что Солнце состоит из высокотемпературного жидкометаллического водорода [7–10].

В рамках общей теории относительности структура, вещество и поле такой звезды характеризуются метрикой Шварцшильда для сферы, заполненной несжимаемой жидкостью. Недавний теоретический результат, полученный Л. Борисовой [11, 12], показал, что если представить Солнце в виде жидкой сферы согласно этой метрике, то поле Солнца имеет пространственный разрыв в поясе астероидов: это означает, что разрыв пространства препятствует формированию вещества в виде планеты на этой орбите. Поэтому мы уверены, что идём по правильному пути.

Мы выводим уравнения Эйнштейна (уравнения поля) в виде, который моделирует звёзды как жидкие сферы: это — частная форма уравнений Эйнштейна, которая может удовлетворять или не удовлетворять конкретной метрике пространства. Поэтому затем мы доказываем, что полученный частный вид уравнений поля удовлетворяет метрике Шварцшильда для жидкой сферы.

Затем на основе тензора энергии-импульса идеальной жидкости (стоящего в правой части уравнений поля) мы выводим закон сохранения жидкого вещества обычных звёзд. Решая полученные уравнения сохранения энергии-импульса, мы получаем давление и плотность жидкого вещества внутри звёзд. Затем мы получаем формулу для светимости звёзд в рамках жидкостной модели. Мы исследуем, как эта теоретически выведенная формула может быть совместима с соотношением масса-светимость (которое является основным эмпирическим соотношением наблюдательной астрофизики). В результате мы получаем физические характеристики механизма, производящего энергию внутри звёзд.

Относительно самого механизма звёздной энергии мы заключаем, что это преобразование вещества в излучение на поверхности крошечного центрального “ядра” внутри каждой звезды. Ядро мо-

жет иметь плотность, отличную от плотности остального вещества звезды (жидкая сфера внутри однородна), и отделено поверхностью коллапса с радиусом, определяемым массой звезды. Несмотря на то, что почти вся масса звезды находится вне этого ядра (ядро не является чёрной дырой), сила гравитации стремится к бесконечности на поверхности ядра из-за пространственного разрыва на ней внутреннего поля звезды. Такой сверхсильной силы гравитации достаточно для передачи необходимой кинетической энергии лёгким атомным ядрам звёздного вещества, чтобы начать процесс термоядерного синтеза. Энергия, производимая термоядерным синтезом, — и есть та самая энергия, которую излучают звёзды. Иными словами, крошечное ядро каждой звезды является её светящимся “внутренним солнцем”, а произведённая там звёздная энергия затем передаётся на физическую поверхность звезды за счёт теплопроводности (что закономерно для жидких сред).

Нейтронные звёзды и пульсары, будучи быстро вращающимися объектами, представляют собой особый тип звёзд. Структура, вещество и поле таких звёзд должны описываться другой метрикой, а именно — метрикой вращающейся жидкой сферы в особых физических условиях, специфических для нейтронных звёзд и пульсаров. Мы вводим такую метрику. Согласно этой метрике, жидкое вещество нейтронных звёзд и пульсаров находится в том же состоянии, что и физический вакуум высокой плотности. Затем мы выводим уравнения поля Эйнштейна в частном виде, который удовлетворяет этой метрике. Мы показываем, что тензор энергии-импульса полученных уравнений поля удовлетворяет закону сохранения только в том случае, когда поток энергии изнутри объекта сильно анизотропен и направлен к северному и южному полюсам, а ось магнитного поля не совпадает с осью вращения объекта. Это совпадает с известными наблюдательными данными о нейтронных звёздах и пульсарах.

Таков наш план на следующие главы. В результате мы получаем математическую теорию жидких звёзд и источников звёздной энергии в соответствии с общей теорией относительности.

Прежде чем перейти к выполнению всех этих этапов работы, в следующем §1.2 мы рассмотрим метрики пространства-времени, которые мы используем в нашей теории. Затем мы вводим новую классификацию звёзд. Эта классификация основана на располо-

жении пространственного разрыва в поле звезды относительно её поверхности (пространственный разрыв рассчитывается по метрике и собственным параметрам звезды).

В конце этой главы, в §1.3 мы дадим детальный обзор математического аппарата физически наблюдаемых величин в пространстве-времени общей теории относительности, который нам понадобится для наших дальнейших вычислений.

1.2 Моделирование звезды методами общей теории относительности

Звёзды — это сферические тела, наполненные веществом и светом. Их поля также сферически симметричны. Поэтому при рассмотрении звезды в терминах общей теории относительности структура, вещество и поле такого объекта должны задаваться метрикой сферически-симметричного пространства.

Среди метрик пространства-времени, известных благодаря общей теории относительности, три основные метрики описывают сферически симметричные поля. Это — метрика Шварцшильда точечной массы, метрика Шварцшильда сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, и метрика де Ситтера, описывающая сферическое распределение физического вакуума (λ -поля, определяемого λ -членом в уравнениях поля Эйнштейна). Все эти три метрики будут использоваться нами при рассмотрении звёзд.

1.2.1 Метрика точечной массы

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

была введена в 1916 году Карлом Шварцшильдом [13]. Эта метрика описывает поле сферически-симметричного массивного тела на настолько большом расстоянии от него, что физическими размерами этого тела можно пренебречь (предполагая, что тело является материальной точкой). Метрика записывается в сферических координатах r , ϕ , θ , начало которых совпадает с данной материальной точкой. Кроме того, здесь $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ гильбертов радиус для данной материальной точки*, тогда как M масса данного точечного тела (т.е. масса источника поля).

*Это не то же самое, что физический радиус тела. На расстоянии гильбертова

Согласно метрике (1.1), такое пространство не вращается и не деформируется. Гравитационно-инерциальная сила (подробности см. в §1.3) в таком пространстве выводится на основе только компоненты g_{00} фундаментального метрического тензора. Как видно из данной метрики, g_{00} в этом случае (1.1) имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (1.2)$$

Дифференцируя гравитационный потенциал $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$ по x^i , получаем градиент потенциала

$$\frac{\partial w}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (1.3)$$

Затем мы подставляем этот результат в общую формулу для гравитационно-инерциальной силы (1.42), принимая во внимание отсутствие вращения пространства. В итоге мы получаем формулы для ковариантной и контравариантной компонент гравитационно-инерциальной силы

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}. \quad (1.4)$$

Как видно из этих формул, гравитационно-инерциальная сила в пространстве точечной массы обусловлена только ньютоновским гравитационным полем, создаваемым этой массой, и обратно пропорциональна квадрату расстояния r от неё.

Искривление пространства точечной массы обусловлено ньютоновским полем тяготения, создаваемым массивным телом в начале координат. Это — не пространство постоянной кривизны; его кривизна уменьшается по мере удаления от массивного тела (источника поля). На бесконечно большом расстоянии от тела пространство является плоским.

радиуса от центра тяжести массивного тела ($r = r_g$) происходит гравитационный коллапс: в пространстве без вращения это — состояние, при котором компонента g_{00} фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ равна нулю ($g_{00} = 0$). Подробнее см. §5.1 и §5.2. *Гильбертов радиус* был введён Давидом Гильбертом (1862–1944), который рассмотрел его в 1917 году [15] на основе метрики Шварцшильда для точечной массы. Он также известен как *радиус Шварцшильда*, несмотря на то, что Карл Шварцшильд (1873–1916) никогда не рассматривал гравитационный коллапс в своих работах [13, 14].

1.2.2 Пространство, заполненное сферически-симметричным однородным распределением физического вакуума (λ -поле в уравнениях Эйнштейна), не содержит остовов вещества и описывается метрикой де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.5)$$

Эта метрика была введена в 1918 году Виллемом де Ситтером [16] как статическая модель Вселенной. Предполагается, что $\lambda < 10^{-56}$ в космосе, поэтому физический вакуум имеет очень низкую плотность. Современный вариант статической модели Вселенной представлен в [17].

Фундаментальный метрический тензор через свои компоненты в метрике де Ситтера (1.5) показывает, что такое пространство не деформируется и не вращается. Следовательно, гравитационно-инерциальная сила (1.42) в таком пространстве обусловлена только компонентой g_{00} , которая имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{\lambda r^2}{3}. \quad (1.6)$$

Соответственно, после аналогичных вычислений, что и ранее, получаем гравитационно-инерциальную силу

$$F_1 = \frac{\lambda c^2}{3} \frac{r}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}, \quad F^1 = \frac{\lambda c^2}{3} r. \quad (1.7)$$

Это — ньютоновская гравитационная сила, которая пропорциональна расстоянию r : эта сила (λ -сила) растёт вместе с расстоянием, на котором она действует. Если $\lambda < 0$ (наблюдаемая плотность вакуума положительна), то это — сила притяжения. Если $\lambda > 0$ (наблюдаемая плотность вакуума отрицательна), то это — сила отталкивания. См. главу 5 нашей книги [18], где мы подробно рассмотрели физический вакуум.

Искривление пространства де Ситтера обусловлено ньютоновским гравитационным полем, создаваемым физическим вакуумом (λ -полем), однородно заполняющим пространство. Кривизна одинакова везде в таком пространстве. Другими словами, это — пространство постоянной кривизны.

1.2.3 Метрика сферы несжимаемой жидкости впервые была введена в 1916 году Карлом Шварцшильдом [14] в урезанном виде, содержащем существенные ограничения. Он искусственно предварительно наложил ограничения при выводе метрики, чтобы сделать поле не содержащим разрыва*. Истинная метрика сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, оставалась неизвестной до 2009 года, когда Л. Борисова вывела её в наиболее полной форме [11, 12], свободной от каких-либо ограничений и, таким образом, учитывающей разрыв пространства.

Модель звёзд как жидких сфер играет ключевую роль в нашей теории. Поэтому рассмотрим метрику сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, в полном виде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.8)$$

как это выведено в статьях [11, 12]. Здесь $a = const$ есть физический радиус жидкой сферы, тогда как $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ гильбертов радиус, рассчитанный по массе M жидкости, которая является источником поля. Полный вывод метрики, содержащий все необходимые детали, будет воспроизведён в §2.1 книги, где мы применим эту метрику к обычным звёздам.

Метрика (1.8) записывается для расстояний $r < a$. Это — “внутренняя метрика” жидкой сферы. На поверхности сферы ($r = a$) эта метрика совпадает с метрикой точечной массы. Кроме того, как было доказано в [11] (этот вывод будет повторён в §2.1 этой книги), “внешняя метрика” жидкой сферы ($r > a$) также совпадает с метрикой точечной массы: внешнее поле жидкой сферы совпадает с ньютоновским гравитационным полем точечной массы.

Как видно из метрики жидкой сферы (1.8), такое пространство не деформируется и не вращается. Следовательно, согласно опреде-

*На самом деле, как только на метрику предварительно наложено какое-либо ограничение, геометрия метрического пространства искусственно урезается. В этом смысле метрика Шварцшильда, введённая в 1916 г., не является подлинной метрикой пространства жидкой сферы.

лению гравитационно-инерционной силы (1.42), сила в таком пространстве обусловлена только g_{00} . В метрике (1.8) мы имеем

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2. \quad (1.9)$$

После аналогичных вычислений, что и ранее, мы получаем

$$F_1 = - \frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{1}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (1.10)$$

$$F^1 = - \frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (1.11)$$

Поскольку $r < a$ внутри сферы, то в ней $F_1 < 0$. Следовательно, это — сила притяжения. Её численное значение пропорционально расстоянию r . Эта сила равна нулю в центре сферы и достигает максимального значения на поверхности.

Можно показать, что кривизна такого пространства, обусловленная упомянутым полем тяготения, увеличивается по мере удаления от центра жидкой сферы к её поверхности. Другими словами, пространство внутри жидкой сферы не является пространством постоянной кривизны. Мы приведём это доказательство и обсудим как четырёхмерную кривизну, так и трёхмерную наблюдаемую кривизну пространства в §2.3.

1.2.4 Здесь мы предлагаем новый метод моделирования звёзд на основе математических методов общей теории относительности.

Рассмотрим звёзды как сферические тела, состоящие из жидкости. В рамках этой модели внутреннее строение, вещество и поле звезды описываются метрикой сферы, заполненной несжимаемой жидкостью (1.8). Как было показано выше, сила тяготения при этом возрастает пропорционально удалению от центра звезды. Внешнее поле звезды описывается метрикой точечной массы (1.1). Во внешнем поле действует обычная ньютоновская гравитационная сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния от звезды.

Поле жидкой сферы как таковое не везде непрерывно. Согласно внешней метрике (1.1) и внутренней метрике (1.8) жидкой сферы,

её поле имеет *пространственный разрыв*, который появляется на двух расстояниях от её центра. В связи с этим мы сейчас введём новую классификацию звёзд согласно общей теории относительности. Сейчас мы объясним, как это делается.

Разрыв пространства происходит из-за нарушения *сигнатурных условий* его метрики. Это означает, что пространство имеет сингулярность в той области (поверхности или объёме), где нарушается хотя бы одно из сигнатурных условий. Сигнатурные условия знакопеременной диагональной метрики (+---) четырёхмерного псевдориманова пространства (базового пространства-времени общей теории относительности) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &> 0 \\ g_{00} g_{11} &< 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &> 0 \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

Первые три известны как *слабые сигнатурные условия*. Четвёртое известно как *сильное сигнатурное условие*. Если одно или все слабые сигнатурные условия нарушены, а сильное сигнатурное условие сохраняется, то это — *устраняемая сингулярность*. При нарушении сильного сигнатурного условия пространство-время имеет *неустраняемую сингулярность*: в этом случае решение обычно выпадает из рассмотрения, поскольку оно “не имеет физического смысла”. Да, возможно, что кто-то не смог увидеть в этом физического смысла. Тем не менее, эти случаи очень важны математически. Поэтому мы будем рассматривать любую сингулярность пространства (разрыв пространства).

Итак, рассмотрим пространство жидкой сферы. Согласно внешней метрике сферы (1.1) первое сигнатурное условие нарушается ($g_{00} = 0$) на расстоянии $r = r_g$ от центра

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{r_g}{r} = 0 \\ g_{00} g_{11} &= -1 < 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &= r^2 > 0 \\ g &= -r^4 \sin^2 \theta < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

Внутренняя метрика сферы (1.8) показывает, что второе, третье и четвёртое сигнатурные условия нарушаются на расстоянии

$$r = r_{br} = \sqrt{\frac{a^3}{r_g}} \quad (1.14)$$

от центра сферы, на котором вышеупомянутые три функции стремятся к бесконечности*

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \frac{9}{4} \left(1 - \frac{r_g}{a}\right) > 0 \\ g_{00} g_{11} &\rightarrow -\infty \\ g_{00} g_{11} g_{22} &\rightarrow \infty \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\}. \quad (1.15)$$

Это означает, что поле жидкой сферы имеет пространственный разрыв на двух расстояниях от её центра

1. Первый разрыв пространства происходит на поверхности, которая сферически охватывает центр тяжести жидкой сферы на расстоянии гильбертова радиуса $r = r_g$. Это — поверхность гравитационного коллапса согласно условию $g_{00} = 0$ в этом разрыве пространства. Иными словами, хотя сама жидкая сфера может не быть коллапсаром, она всегда содержит центральное “ядро”, которое отделено от остального жидкого вещества поверхностью гравитационного коллапса. В случае, когда жидкая сфера является звездой, каждая звезда содержит такое ядро. Это ядро намного меньше физического радиуса обычных звёзд: например, радиус сколлапсировавшего ядра (гильбертов радиус) Солнца составляет $r_g = 2,9 \times 10^5$ см (2,9 км), а физический радиус Солнца составляет $7,0 \times 10^{10}$ см (700 000 км). Поэтому мы называем первый разрыв пространства *внутренним пространственным разрывом*;
2. Второй разрыв пространства происходит на сферической поверхности, которая окружает жидкое тело на расстоянии, равном $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$. Это расстояние намного больше, чем физический радиус обычных звёзд. Таким образом, это — *внешний*

*Как известно, функция имеет разрыв при стремлении к бесконечности.

пространственный разрыв, в отличие от разрыва внутреннего пространства на гильбертовом радиусе. Например, второй (внешний) пространственный разрыв поля Солнца происходит на расстоянии $r_{br} = 3,4 \times 10^{13}$ см = 340 000 000 км = 2,3 а.е. Этот разрыв пространства находится внутри пояса астероидов, вблизи орбиты максимальной концентрации астероидов (пояс астероидов расположен от 2,1 а.е. до 4,3 а.е. от Солнца). Это означает, что внешний разрыв пространства в поле Солнца не позволяет веществу сформироваться в общее физическое тело (такое, как планета) на этой орбите.

Если физический радиус a жидкой звезды совпадает с гильбертовым радиусом $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, это — гравитационный коллапсар. В таком случае ($r_g = a$) внутренняя метрика жидкой сферы (1.8) принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.16)$$

Эта метрика при условии $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$ (т.е. когда $\lambda > 0$), имеет тот же вид, что и метрика де Ситтера (1.5)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda r^2}{3} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.17)$$

описывающая сферическое распределение физического вакуума (λ -поле). Это означает, что такой сколлапсировавший объект состоит из жидкости, состояние которой близко к состоянию физического вакуума высокой плотности.

В результате эта новая модель жидких звёзд позволяет нам ввести новую классификацию звёзд согласно месту расположения пространственного разрыва в поле звезды относительно её физической поверхности:

Тип I: обычные звёзды, включая Солнце

Радиус сколлапсировавшего ядра, т.е. гильбертов радиус r_g обычной звезды, на много порядков меньше её физического радиуса a (т.е. $r_g \ll a$). Внешний пространственный разрыв r_{br} расположен далеко от обычной звезды в космосе ($r_{br} \gg a$). Это — почти все видимые звёзды: сверхгиганты, гиганты, Солнце,

Объект	Масса M , грамм	Радиус a , см	Гильберт. радиус r_g , см	$\frac{r_g}{a}$	Разрыв пр-ва r_{br} , см	$\frac{r_{br}}{a}$	Тип
Красный сверхгигант*	$4,0 \times 10^{34}$	$7,0 \times 10^{13}$	$5,9 \times 10^6$	$8,4 \times 10^{-8}$	$2,4 \times 10^{17}$	$3,4 \times 10^3$	I
Белый сверхгигант [†]	$3,4 \times 10^{34}$	$4,8 \times 10^{12}$	$5,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{-6}$	$4,7 \times 10^{15}$	$9,8 \times 10^2$	I
Солнце	$2,0 \times 10^{33}$	$7,0 \times 10^{10}$	$2,9 \times 10^5$	$4,1 \times 10^{-6}$	$3,4 \times 10^{13}$	$4,9 \times 10^2$	I
Юпитер (протозвезда)	$1,9 \times 10^{30}$	$7,1 \times 10^9$	$2,8 \times 10^2$	$4,0 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{13}$	$4,8 \times 10^3$	I
Белый карлик [‡]	$2,0 \times 10^{33}$	$6,4 \times 10^8$	$3,0 \times 10^5$	$4,7 \times 10^{-4}$	$2,9 \times 10^{10}$	$0,45 \times 10^2$	I
Красные карлики	$6,7 \times 10^{32}$	$2,3 \times 10^{10}$	$9,9 \times 10^4$	$4,3 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{13}$	$4,8 \times 10^2$	I
Коричневые карлики	$1,5 \times 10^{32}$	$7,0 \times 10^9$	$2,2 \times 10^4$	$3,1 \times 10^{-6}$	$4,0 \times 10^{14}$	$5,7 \times 10^4$	I
Звёзды Вольфа-Райе	$1,0 \times 10^{35}$	$1,4 \times 10^{12}$	$1,5 \times 10^7$	$1,1 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{14}$	$3,1 \times 10^2$	Ia
Нейтронные звёзды	$2,6 \times 10^{33}$	$1,0 \times 10^6$	$3,9 \times 10^5$	0,39	$1,6 \times 10^6$	1,6	II
Пульсары [§]	$3,9 \times 10^{33}$	$1,6 \times 10^6$	$5,8 \times 10^5$	0,36	$2,7 \times 10^6$	1,7	II
Чёрные дыры	разные	разные	разные	1	1	1	III

* Бетельгейзе. [†] Ригель. [‡] Сириус В. [§] Радио-пульсар J1903+0327.

Таблица 1.1: Классификация звёзд согласно общей теории относительности. Данная классификация представлена численными значениями параметров звёзд, рассчитанных нами для типичных звёзд разных классов.

коричневые карлики и даже белые карлики. Мы рассмотрим обычные звёзды в главе 2;

Тип Ia: звёзды Вольфа-Райе

Они почти такие же, как и обычные звёзды, за исключением того, что следует учитывать мощный звёздный ветер, состоящий из частиц звёздного вещества, постоянно вылетающих из звезды (это — свойство, характеризующее звёзды Вольфа-Райе). Звёздный ветер будет рассмотрен в главе 3;

Тип II: нейтронные звёзды и пульсары

Радиус гильбертова ядра близок к физическому радиусу такой звезды ($r_g \lesssim a$), но не достигает его (иначе звезда была бы невидима для наблюдения). Внешний пространственный разрыв r_{br} расположен во внешнем космосе близко к физической поверхности такой звезды, но не достигает её ($r_{br} \gtrsim a$). Кроме того, пульсары вращаются с большими скоростями, близкими к релятивистским. Поэтому метрика и тензор энергии-импульса такой звезды отличаются от таковых у обычных звёзд. Мы рассмотрим нейтронные звёзды и пульсары в главе 4;

Тип III: чёрные дыры

Гильбертов радиус r_g (радиус разрыва внутреннего пространства) и радиус разрыва внешнего пространства r_{br} такого объекта совпадают с его физической поверхностью ($r_g = r_{br} = a$). Это — гравитационные коллапсары (чёрные дыры): на физической поверхности такого объекта возникает состояние гравитационного коллапса ($g_{00} = 0$), поэтому вся его масса сосредоточена внутри поверхности коллапса. Чёрные дыры будут в центре внимания в главе 5 книги.

Эта классификация представлена в таблице 1.1 значениями параметров, рассчитанных для типичных звёзд известных классов.

Эта модель жидких звёзд, построенная на основе общей теории относительности и рассмотренная в новой классификации звёзд, будет предметом развития в следующих главах.

1.3 Физические наблюдаемые величины

Прежде чем рассматривать звёзды методами общей теории относительности, необходимо изложить основы математического аппарата физически наблюдаемых величин в четырёхмерном псевдо-

римановом пространстве (пространстве-времени). Подробное описание теории физически наблюдаемых величин уже дано в соответствующих главах наших книг [18, 19]. Здесь мы приведём лишь основы этой теории, необходимые для данного исследования*.

Чтобы построить описательную картину любой физической теории, нам необходимо выразить полученные результаты через реальные физические величины, которые можно измерить в эксперименте. Это — *физически наблюдаемые величины*. В общей теории относительности эта проблема вовсе не тривиальна, потому что мы рассматриваем объекты в четырёхмерном пространстве (пространстве-времени), и поэтому мы должны определить, какие компоненты соответствующих четырёхмерных тензорных величин действительно физически наблюдаемы.

Вот вкратце эта проблема. Все уравнения общей теории относительности приводятся в *общековариантной форме*, которая не зависит от выбора нами системы отсчёта. Уравнения, как и содержащиеся в них переменные, четырёхмерны. Таким образом, мы задаёмся вопросом, какие из компонент этих четырёхмерных величин действительно наблюдаемы в реальных физических экспериментах, т.е. какие их компоненты являются реально физически наблюдаемыми величинами? Интуитивно мы могли бы, на первый взгляд, легко предположить, что трёхмерные компоненты четырёхмерного тензора составляют физически наблюдаемую величину. Но в то же время мы не можем быть абсолютно уверены, что то, что мы наблюдаем, является просто трёхмерными компонентами четырёхмерных величин, а не более сложными переменными, которые зависят от других факторов, например, от свойств физических эталонов пространства отсчёта.

Как известно, четырёхмерный вектор (тензор 1-го ранга) имеет всего 4 компоненты: 1 временную и 3 пространственные. Тензор 2-го ранга, например, тензор вращения или тензор деформации, имеет 16 компонент: 1 временную, 9 пространственных и 6 смешанных

*Наиболее полное на сегодняшний день описание (компендиум) математического аппарата физически наблюдаемых величин в общей теории относительности дано в нашей недавней статье. В этой статье мы собрали всё (или почти всё), что мы знаем на эту тему от Зельманова и что было получено за прошедшие десятилетия: Rabounski D. and Borissova L. Physical observables in General Relativity and the Zelmanov chronometric invariants. *Progress in Physics*, 2023, vol. 19, no. 1, 3–29.

(пространственно-временных) компонент. Тогда, действительно ли смешанные компоненты являются физически наблюдаемыми величинами? Тензоры более высоких рангов имеют ещё больше компонент; например, тензор кривизны Римана-Кристоффеля имеет 256 компонент, поэтому проблема эвристического распознавания истинно физически наблюдаемых компонент становится намного сложнее. Кроме того, имеется препятствие, связанное с распознаванием наблюдаемых компонент ковариантных тензоров (у которых индексы занимают нижнее положение) и тензоров смешанного типа, имеющих как нижний, так и верхний индексы.

Мы видим, что распознавание физически наблюдаемых величин в общей теории относительности не является тривиальной задачей. В идеале мы хотели бы иметь математический метод для *однозначного* вычисления физически наблюдаемых величин для любых тензоров любого заданного ранга.

Многочисленные попытки разработать такой математический метод предпринимались в 1930-х годах некоторыми исследователями того времени. Некоторый вклад был сделан Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем в их знаменитой *Теории поля* [20], впервые опубликованной в 1939 г. Помимо обсуждения самой проблемы физически наблюдаемых величин, в §84 своей книги они ввели интервал физически наблюдаемого времени наряду с физически наблюдаемым трёхмерным интервалом, которые зависят от физических свойств (физических эталонов) пространства отсчёта наблюдателя. Но все подобные попытки, предпринятые в 1930-х гг., ограничивались лишь решением некоторых частных задач. Ни один из них не привёл к полноценному математическому аппарату.

Полноценный математический аппарат для вычисления физически наблюдаемых величин в четырёхмерном псевдоримановом пространстве был впервые введён Абрамом Леонидовичем Зельмановым и известен как *теория хронометрических инвариантов*, или *хронометрически инвариантный формализм*. Впервые он был представлен в 1944 году в его кандидатской диссертации [21], затем — в его кратких статьях 1956–1957 гг. [22, 23].

Суть зельмановского математического аппарата физически наблюдаемых величин (хронометрических инвариантов), разработанного специально для четырёхмерного искривлённого и неоднородного псевдориманова пространства (пространства-времени), за-

ключается в следующем.

В любой точке пространства-времени мы можем провести трёхмерное пространственное сечение $x^0 = ct = const$ (трёхмерное пространство), ортогональное заданной линии времени $x^i = const$. Если пространственное сечение всюду ортогонально линиям времени, пронизывающим его в каждой точке, такое пространство называется *голономным*. В противном случае, если пространственное сечение неортогонально вышеупомянутым линиям времени, пространство называется *неголономным*.

Система отсчёта реального наблюдателя включает в себя координатную сетку, натянутую на реальное физическое тело (тело отсчёта наблюдателя, находящееся рядом с ним) и реальные часы, расположенные в каждой точке этой координатной сети. И координатная сетка, и часы представляют собой набор реальных эталонов, с которыми наблюдатель сравнивает результаты своих измерений. Поэтому регистрируемые наблюдателем физически наблюдаемые величины должны быть результатом проецирования четырёхмерных величин на линию времени и на пространственное сечение, связанные с ним.

Оператор проецирования на линию времени наблюдателя представляет собой мировой вектор четырёхмерной скорости

$$b^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad (1.18)$$

его тела отсчёта по отношению к нему. Этот мировой вектор касателен к мировой линии наблюдателя в каждой её точке, поэтому это — вектор единичной длины

$$b_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{ds^2} = +1. \quad (1.19)$$

Оператор проецирования на пространственное сечение наблюдателя (его локальное трёхмерное пространство) определяется как четырёхмерный симметричный тензор $h_{\alpha\beta}$, имеющий вид

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta \\ h^{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\beta} + b^\alpha b^\beta \\ h_\alpha^\beta &= -g_\alpha^\beta + b_\alpha b^\beta \end{aligned} \right\}. \quad (1.20)$$

Мировой вектор b^α и тензор $h_{\alpha\beta}$ ортогональны друг другу. Математически это означает, что их совместная свёртка равна нулю: $h_{\alpha\beta}b^\alpha = 0$, $h^{\alpha\beta}b_\alpha = 0$, $h^\alpha_\beta b_\alpha = 0$, $h^\beta_\alpha b^\alpha = 0$. Таким образом, основные свойства операторов проецирования на линию времени и пространственное сечение наблюдателя совместно выражаются, очевидно, следующим образом

$$b_\alpha b^\alpha = +1, \quad h^\beta_\alpha b^\alpha = 0. \quad (1.21)$$

Если наблюдатель покоится относительно своего тела отсчёта, его система отсчёта называется *сопутствующей системой отсчёта*. В этом случае $b^i = 0$ в его системе отсчёта, а координатные сетки его пространственного сечения связаны преобразованиями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3), \quad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.22)$$

где третье уравнение отображает тот факт, что пространственные координаты в тильдованной сетке не зависят от времени нетильдованной сетки, что эквивалентно координатной сетке, где линии времени фиксированы ($x^i = const$) в каждой точке. Преобразование пространственных координат есть не что иное, как переход от одной координатной сетки к другой в пределах одного и того же пространственного сечения. Преобразование времени означает смену всего набора часов, т.е. это — переход в другое пространственное сечение (другое трёхмерное пространство отсчёта). На практике это означает замену одного тела отсчёта со всеми его физическими эталонами другим телом отсчёта, имеющим свои собственные физические эталоны. Но при использовании разных эталонов наблюдатель получит разные результаты (другие наблюдаемые величины). Следовательно, физически наблюдаемые проекции в сопутствующей системе отсчёта должны быть инвариантны относительно преобразования времени, что влечёт за собой инвариантность относительно преобразований (1.22). Другими словами, такие величины должны обладать свойством *хронометрической инвариантности*.

Поэтому мы называем физически наблюдаемые величины в сопутствующей системе отсчёта *хронометрически инвариантными величинами* или, короче, *хронометрическими инвариантами*.

Тензор проецирования $h_{\alpha\beta}$, рассматриваемый в пространстве отсчёта, сопутствующем наблюдателю, обладает всеми свойствами фундаментального метрического тензора, а именно

$$h_i^\alpha h_\alpha^k = \delta_i^k - b_i b^k = \delta_i^k, \quad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где δ_i^k — единичный трёхмерный тензор*. Следовательно, в сопутствующей системе отсчёта, используя трёхмерный тензор h_{ik} мы можем поднимать или опускать индексы в хронометрически инвариантных величинах.

Таким образом, в сопутствующей системе отсчёта основными свойствами операторов проецирования являются

$$b_\alpha b^\alpha = +1, \quad h_\alpha^i b^\alpha = 0, \quad h_i^\alpha h_\alpha^k = \delta_i^k. \quad (1.24)$$

Вычислим компоненты операторов проецирования в сопутствующей системе отсчёта. Компонента b^0 получается из очевидного условия $b_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta = 1$, которое в сопутствующей системе отсчёта ($b^i = 0$) имеет вид: $b_\alpha b^\alpha = g_{00} b^0 b^0 = 1$. Эта компонента и остальные компоненты b^α равны

$$\left. \begin{aligned} b^0 &= \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, & b^i &= 0 \\ b_0 &= g_{0\alpha} b^\alpha = \sqrt{g_{00}}, & b_i &= g_{i\alpha} b^\alpha = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}} \end{aligned} \right\}, \quad (1.25)$$

а компоненты $h_{\alpha\beta}$ равны

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &= 0, & h^{00} &= -g^{00} + \frac{1}{g_{00}}, & h_0^0 &= 0 \\ h_{0i} &= 0, & h^{0i} &= -g^{0i}, & h_0^i &= \delta_0^i = 0 \\ h_{i0} &= 0, & h^{i0} &= -g^{i0}, & h_i^0 &= \frac{g_{i0}}{g_{00}} \\ h_{ik} &= -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}, & h^{ik} &= -g^{ik}, & h_k^i &= -g_k^i = \delta_k^i \end{aligned} \right\}. \quad (1.26)$$

*Тензор δ_i^k есть трёхмерная часть четырёхмерного единичного тензора δ_β^α , который можно использовать для замены индексов в четырёхмерных величинах.

Зельманов создал математический метод для вычисления хронометрически инвариантных (физически наблюдаемых) проекций любой общеквариантной (четырёхмерной) тензорной величины. Он сформулировал этот метод в виде теоремы, которую мы называем *теоремой Зельманова*:

Теорема Зельманова

Пусть есть четырёхмерный тензор $Q_{\alpha\beta\dots\sigma}^{\mu\nu\dots\rho}$ ранга r , где $Q_{00\dots0}^{ik\dots p}$ представляет собой трёхмерную часть тензора $Q_{00\dots0}^{\mu\nu\dots\rho}$, у которого все верхние индексы не равны нулю, а все m нижних индексов равны нулю. Тогда

$$T^{ik\dots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}} Q_{00\dots0}^{ik\dots p} \quad (1.27)$$

представляет собой хронометрически инвариантный трёхмерный контравариантный тензор $(r - m)$ -го ранга. Это означает, что х.и.-тензор $T^{ik\dots p}$ является результатом m -кратного проецирования исходного тензора $Q_{\alpha\beta\dots\sigma}^{\mu\nu\dots\rho}$ на линию времени по индексам $\alpha, \beta, \dots, \sigma$ и на пространственное сечение — по $r - m$ индексам μ, ν, \dots, ρ .

Согласно этой теореме, хронометрически инвариантные (физически наблюдаемые) проекции четырёхмерного вектора Q^α равны

$$b^\alpha Q_\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h_\alpha^i Q^\alpha = Q^i, \quad (1.28)$$

а х.и.-проекциями симметричного тензора 2-го ранга $Q^{\alpha\beta}$ являются следующие величины

$$b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}, \quad h^{i\alpha} b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_0^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h_\alpha^i h_\beta^k Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}. \quad (1.29)$$

Так х.и.-проекциями четырёхмерного координатного интервала dx^α являются интервал физически наблюдаемого времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i \quad (1.30)$$

и интервал наблюдаемых координат dx^i , совпадающих с пространственными координатами. Физически наблюдаемая скорость частицы есть трёхмерный х.и.-вектор

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad v_i v^i = h_{ik} v^i v^k = v^2, \quad (1.31)$$

который на изотропных траекториях становится трёхмерным х.и.-вектором физически наблюдаемой скорости света

$$c^i = v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad c_i c^i = h_{ik} c^i c^k = c^2. \quad (1.32)$$

Проецируя ковариантный и контравариантный фундаментальный метрический тензор на пространственное сечение в сопутствующей системе отсчёта ($b^i = 0$)

$$\left. \begin{aligned} h_i^\alpha h_k^\beta g_{\alpha\beta} &= g_{ik} - b_i b_k = -h_{ik} \\ h_\alpha^i h_\beta^k g^{\alpha\beta} &= g^{ik} - b^i b^k = g^{ik} = -h^{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (1.33)$$

получаем, что х.и.-величина

$$h_{ik} = -g_{ik} + b_i b_k \quad (1.34)$$

представляет собой *х.и.-метрический тензор* (физически наблюдаемый метрический тензор), с помощью которого мы можем поднимать и опускать индексы у любого трёхмерного х.и.-объекта в сопутствующей системе отсчёта. Контравариантная и смешанная компоненты х.и.-метрического тензора, очевидно, равны

$$h^{ik} = -g^{ik}, \quad h_k^i = -g_k^i = \delta_k^i. \quad (1.35)$$

Выражая $g_{\alpha\beta}$ через определение $h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta$, мы получаем формулу для четырёхмерного интервала

$$ds^2 = b_\alpha b_\beta dx^\alpha dx^\beta - h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.36)$$

выраженного через операторы проецирования b_α и $h_{\alpha\beta}$. В этой формуле $b_\alpha dx^\alpha = cd\tau$, поэтому первый член равен $b_\alpha b_\beta dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2$. Второй член $h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\sigma^2$ в сопутствующей системе отсчёта есть квадрат наблюдаемого трёхмерного интервала*

$$d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k. \quad (1.37)$$

Таким образом, четырёхмерный интервал, выраженный через физически наблюдаемые величины, равен

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \quad (1.38)$$

*Это связано с тем, что $h_{\alpha\beta}$ в сопутствующей системе отсчёта обладает всеми свойствами фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$.

Основные физически наблюдаемые свойства сопутствующего пространства отсчёта, ассоциированного с наблюдателем, также были выведены Зельмановым в рамках этой теории, в частности — исходя из свойства некоммутативности (отличия от нуля разности) смешанных вторых х.и.-производных по координатам

$$\frac{*\partial^2}{\partial x^i \partial t} - \frac{*\partial^2}{\partial t \partial x^i} = \frac{1}{c^2} F_i \frac{*\partial}{\partial t}, \quad (1.39)$$

$$\frac{*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{*\partial^2}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2}{c^2} A_{ik} \frac{*\partial}{\partial t}, \quad (1.40)$$

где х.и.-операторы дифференцирования, которые также ввёл Зельманов, имеют следующий вид

$$\frac{*\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0}. \quad (1.41)$$

Первые два физически наблюдаемых свойства пространства отсчёта наблюдателя характеризуются х.и.-вектором гравитационно-инерциальной силы F_i и антисимметричным х.и.-тензором угловых скоростей вращения пространства отсчёта A_{ik}

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right), \quad (1.42)$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_k - F_k v_i), \quad (1.43)$$

где величины w и v_i характеризуют тело отсчёта и пространство отсчёта. Это — гравитационный потенциал

$$w = c^2 (1 - \sqrt{g_{00}}), \quad 1 - \frac{w}{c^2} = \sqrt{g_{00}} \quad (1.44)$$

и линейная скорость вращения пространства

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}, & v^i &= -c g^{0i} \sqrt{g_{00}} \\ v_i &= h_{ik} v^k, & v^2 &= v_k v^k = h_{ik} v^i v^k \end{aligned} \right\}. \quad (1.45)$$

Заметим, что w и v_i не обладают свойством хронометрической инвариантности, несмотря на то, что $v_i = h_{ik} v^k$ может быть получено

как для х.и.-величины, путём опускания индекса с помощью х.и.-метрический тензора h_{ik} .

Зельманов также обнаружил, что х.и.-величины F_i и A_{ik} связаны друг с другом двумя тождествами (мы называем их *тождествами Зельманова*)

$$\frac{* \partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{* \partial F_k}{\partial x^i} - \frac{* \partial F_i}{\partial x^k} \right) = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{* \partial A_{km}}{\partial x^i} + \frac{* \partial A_{mi}}{\partial x^k} + \frac{* \partial A_{ik}}{\partial x^m} + \frac{1}{2} (F_i A_{km} + F_k A_{mi} + F_m A_{ik}) = 0. \quad (1.47)$$

В рамках квазиньютоновского приближения, т.е. в слабом гравитационном поле при скоростях много меньших скорости света и при отсутствии вращения пространства, F_i (1.42) становится обычной нерелятивистской гравитационной силой $F_i = \frac{\partial w}{\partial x^i}$.

Зельманов также доказал следующую теорему, устанавливающую условие голономности пространства:

Теорема Зельманова о голономности пространства

Тождественное равенство нулю тензора A_{ik} нулю в четырёхмерной области пространства (пространства-времени) является необходимым и достаточным условием того, чтобы пространственные сечения были всюду ортогональны линиям времени в этой области.

Иными словами, необходимое и достаточное условие голономности пространства достигается приравнением к нулю тензора A_{ik} . Естественно, если пространственные сечения всюду ортогональны линиям времени (в таком случае пространство голономно), то величины g_{0i} равны нулю. Поскольку $g_{0i} = 0$, мы имеем $v_i = 0$ и $A_{ik} = 0$. Поэтому тензор A_{ik} мы также будем называть *тензором неголономности пространства*.

Если условия $F_i = 0$ и $A_{ik} = 0$ выполняются совместно где-то в пространстве, то условия $g_{00} = 1$ и $g_{0i} = 0$ также там верны. В такой области, согласно (1.30), $d\tau = dt$: разница между координатным временем t и физически наблюдаемым временем τ исчезает при отсутствии гравитационных полей и вращения пространства. Иными словами, согласно теории хронометрических инвариантов, разница между координатным временем t и физически наблюдаемым временем τ возникает как из-за гравитации, так и вращения

пространства отсчёта наблюдателя (локального пространства Земли, в случае наземного наблюдателя), либо из-за каждого из этих физических факторов в отдельности.

С другой стороны, нереально найти такую область Вселенной, где отсутствовали бы гравитационные поля и вращение пространства. Поэтому на практике физически наблюдаемое время τ и координатное время t отличаются друг от друга. Это означает, что реальное пространство нашей Вселенной неголономно, тогда как голономное пространство может быть лишь его локальным приближением.

Условие голономности пространства (пространства-времени) напрямую связано с проблемой интегрируемости времени в нём. Формула для интервала физически наблюдаемого времени (1.30) не имеет интегрирующего множителя. Другими словами, эта формула не может быть приведена к виду

$$d\tau = A dt, \quad (1.48)$$

где множитель A зависит только от t и x^i : в неголономном пространстве формула (1.30) имеет ненулевой второй член, зависящий от интервала координат dx^i и от g_{0i} . В голономном пространстве $A_{ik} = 0$, поэтому $g_{0i} = 0$. В таком случае второй член (1.30) равен нулю, а первый член представляет собой элементарный интервал времени dt с интегрирующим множителем

$$A = \sqrt{g_{00}} = f(x^0, x^i), \quad (1.49)$$

поэтому мы можем написать интеграл

$$d\tau = \int \sqrt{g_{00}} dt. \quad (1.50)$$

Следовательно, время глобально интегрируемо в голономном пространстве ($A_{ik} = 0$), а в неголономном пространстве ($A_{ik} \neq 0$) время не может быть глобально интегрируемо. В случае, когда время интегрируемо (голономное пространство), мы можем синхронизировать часы в двух удалённых точках пространства, перемещая контрольные часы по пути между этими двумя точками. В случае, когда время не может быть глобально интегрировано (неголономное пространство), синхронизация часов в двух удалённых точках

невозможна: чем больше расстояние между этими двумя точками, тем больше расхождение времени на этих часах.

Пространство нашей планеты Земля неголономно из-за его суточного вращения вокруг земной оси. Следовательно, двое часов, расположенных в разных точках земной поверхности, должны показывать расхождение между интервалами времени, регистрируемыми на них. Чем больше расстояние между этими часами, тем больше расхождение физически наблюдаемого времени регистрируемого ими. Этот эффект был достоверно подтверждён экспериментом Хафеле-Китинга [24–29] по перемещению стандартных атомных часов на самолёте вокруг земного шара. В этом эксперименте вращение земного пространства существенно изменило измеряемое время. При полете по вращению Земли пространство наблюдателя на борту самолёта имело большее вращение, чем пространство наблюдателя, который оставался неподвижным на земле. Во время полёта против вращения Земли было наоборот. В результате атомные часы на борту самолёта показывали значительное отклонение наблюдаемого времени в зависимости от скорости вращения пространства.

Поскольку синхронизация часов в различных точках на поверхности Земли является важнейшей задачей морской навигации, а также авиации, поправки на десинхронизацию в давние времена вводились в виде таблиц эмпирически полученных поправок, учитывающих вращение Земли. Теперь, благодаря теории хронометрических инвариантов, мы знаем происхождение этих поправок и можем вычислить их на основе общей теории относительности.

Помимо гравитации и вращения, эталонное тело может деформироваться, меняя со временем свои координатные сетки. Этот фактор также следует учитывать при измерениях. Это можно сделать, выделив в уравнениях трёхмерный симметричный х.и.-тензор скорости деформации пространства отсчёта

$$\left. \begin{aligned} D_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} \\ D^{ik} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial h^{ik}}{\partial t} \\ D &= h^{ik} D_{ik} = \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial t}, \quad h = \det \|h_{ik}\| \end{aligned} \right\}. \quad (1.51)$$

Символы Кристоффеля характеризуют свойство *неоднородности пространства*. Обыкновенные символы Кристоффеля 2-го ранга $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ и 1-го ранга $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (1.52)$$

связаны с соответствующими х.и.-символами Кристоффеля

$$\Delta_{jk}^i = h^{im} \Delta_{jk,m} = \frac{1}{2} h^{im} \left(\frac{* \partial h_{jm}}{\partial x^k} + \frac{* \partial h_{km}}{\partial x^j} - \frac{* \partial h_{jk}}{\partial x^m} \right), \quad (1.53)$$

которые определяются аналогично $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ и $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$. Единственное отличие состоит в том, что здесь вместо фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ используется х.и.-метрический тензор h_{ik} .

Компоненты символов Кристоффеля могут быть выражены через х.и.-свойства пространства отсчёта наблюдателя. Выражая компоненты $g^{\alpha\beta}$ и первые производные от $g_{\alpha\beta}$ через F_i , A_{ik} , D_{ik} , w и v_i , после некоторых вычислений получаем

$$\Gamma_{00,0} = -\frac{1}{c^3} \left(1 - \frac{w}{c^2} \right) \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.54)$$

$$\Gamma_{00,i} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2} \right)^2 F_i + \frac{1}{c^4} v_i \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.55)$$

$$\Gamma_{0i,0} = -\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x^i}, \quad (1.56)$$

$$\Gamma_{0i,j} = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2} \right) \left(D_{ij} + A_{ij} + \frac{1}{c^2} F_j v_i \right) + \frac{1}{c^3} v_j \frac{\partial w}{\partial x^i}, \quad (1.57)$$

$$\Gamma_{ij,0} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2} \right) \left[D_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_j + F_j v_i) \right], \quad (1.58)$$

$$\Gamma_{ij,k} = -\Delta_{ij,k} + \frac{1}{c^2} \left[v_i A_{jk} + v_j A_{ik} + \frac{1}{2} v_k \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) - \frac{1}{2c^2} v_k (F_i v_j + F_j v_i) \right] + \frac{1}{c^4} F_k v_i v_j, \quad (1.59)$$

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{c^3} \left[\frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(1 - \frac{w}{c^2} \right) v_k F^k \right], \quad (1.60)$$

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 F^k, \quad (1.61)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{c^2} \left[-\frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial x^i} + v_k \left(D_i^k + A_i^k + \frac{1}{c^2} v_i F^k \right) \right], \quad (1.62)$$

$$\Gamma_{0i}^k = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(D_i^k + A_i^k + \frac{1}{c^2} v_i F^k \right), \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 = & -\frac{1}{c \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)} \left\{ -D_{ij} + \frac{1}{c^2} v_n \times \right. \\ & \times \left[v_j (D_i^n + A_i^n) + v_i (D_j^n + A_j^n) + \frac{1}{c^2} v_i v_j F^n \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2c^2} (F_i v_j + F_j v_i) - \Delta_{ij}^n v_n \right\}, \quad (1.64) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Delta_{ij}^k - \frac{1}{c^2} \left[v_i (D_j^k + A_j^k) + v_j (D_i^k + A_i^k) + \frac{1}{c^2} v_i v_j F^k \right], \quad (1.65)$$

откуда мы имеем

$$D_k^i + A_k^i = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \left(\Gamma_{0k}^i - \frac{g_{0k} \Gamma_{00}^i}{g_{00}} \right), \quad (1.66)$$

$$F^k = -\frac{c^2 \Gamma_{00}^k}{g_{00}}, \quad (1.67)$$

$$g^{i\alpha} g^{k\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^m = h^{iq} h^{ks} \Delta_{qs}^m. \quad (1.68)$$

По аналогии с соответствующими абсолютными производными, Зельманов также ввёл х.и.-производные, в которых общековариантное дифференцирование и общековариантные символы Кристоффеля заменены на их х.и.-аналоги

$${}^* \nabla_i Q_k = \frac{{}^* \partial Q_k}{\partial x^i} - \Delta_{ik}^l Q_l, \quad (1.69)$$

$${}^* \nabla_i Q^k = \frac{{}^* \partial Q^k}{\partial x^i} + \Delta_{il}^k Q^l, \quad (1.70)$$

$${}^* \nabla_i Q_{jk} = \frac{{}^* \partial Q_{jk}}{\partial x^i} - \Delta_{ij}^l Q_{lk} - \Delta_{ik}^l Q_{jl}, \quad (1.71)$$

$${}^* \nabla_i Q_j^k = \frac{{}^* \partial Q_j^k}{dx^i} - \Delta_{ij}^l Q_l^k + \Delta_{il}^k Q_j^l, \quad (1.72)$$

$${}^* \nabla_i Q^{jk} = \frac{{}^* \partial Q^{jk}}{dx^i} + \Delta_{il}^j Q^{lk} + \Delta_{il}^k Q^{jl}, \quad (1.73)$$

$${}^* \nabla_i Q^i = \frac{{}^* \partial Q^i}{\partial x^i} + \Delta_{ji}^j Q^i, \quad \Delta_{ji}^j = \frac{{}^* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i}, \quad (1.74)$$

$${}^* \nabla_i Q^{ji} = \frac{{}^* \partial Q^{ji}}{\partial x^i} + \Delta_{il}^j Q^{il} + \Delta_{li}^l Q^{ji}, \quad \Delta_{li}^l = \frac{{}^* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i}. \quad (1.75)$$

Зельманов также ввёл х.и.-тензор кривизны. Он следовал той же процедуре, по которой строился тензор Римана-Кристоффеля, исходя из некоммутативности вторых производных произвольного вектора Q^α , взятых в данном пространстве, геометрия которого является римановой.

Зельманов взял за основу свойство некоммутативности вторых х.и.-производных произвольного вектора

$${}^* \nabla_i {}^* \nabla_k Q_l - {}^* \nabla_k {}^* \nabla_i Q_l = \frac{2A_{ik}}{c^2} \frac{{}^* \partial Q_l}{\partial t} + H_{lki}{}^{...j} Q_j, \quad (1.76)$$

где ковариантный х.и.-дифференциал вектора равен

$${}^* \nabla_k Q^i dx^k = dQ^i + \Delta_{kl}^i Q^k dx^l, \quad (1.77)$$

в результате чего он получил х.и.-тензор

$$H_{lki}{}^{...j} = \frac{{}^* \partial \Delta_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{{}^* \partial \Delta_{kl}^j}{\partial x^i} + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^j - \Delta_{kl}^m \Delta_{im}^j, \quad (1.78)$$

который подобен тензору Схоутена из его теории неголономных многообразий [30]. Тензор $H_{lki}{}^{...j}$ отличается от тензора Римана-Кристоффеля $R_{\beta\gamma\delta}{}^{\alpha}$ наличием вращения пространства A_{ik} в формуле (1.76). Его обобщение даёт х.и.-тензор

$$C_{lkij} = \frac{1}{4} (H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}), \quad (1.79)$$

обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора Римана-Кристоффеля в трёхмерном пространстве (пространственном сечении) наблюдателя. Поэтому Зельманов назвал C_{iklj} х.и.-тензором

кривизны, так как он фактически является тензором физически наблюдаемой кривизны трёхмерного пространственного сечения наблюдателя. Его последовательная свёртка шаг за шагом

$$C_{kj} = C_{kij}^{\dots i} = h^{im} C_{kimj}, \quad C = C_j^j = h^{lj} C_{lj} \quad (1.80)$$

даёт х.и.-скалярную кривизну C , которая является *наблюдаемой трёхмерной кривизной* этого пространства.

Тензор H_{lkij} в общем виде связан с тензором кривизны C_{lkij} следующим соотношением

$$H_{lkij} = C_{lkij} + \frac{1}{c^2} \left(2A_{ki} D_{jl} + A_{ij} D_{kl} + A_{jk} D_{il} + A_{kl} D_{ij} + A_{li} D_{jk} \right), \quad (1.81)$$

а свёрнутые тензоры $H_{lk} = H_{lki}^{\dots i}$ и $C_{lk} = C_{lki}^{\dots i}$ связаны как

$$H_{lk} = C_{lk} + \frac{1}{c^2} \left(A_{kj} D_l^j + A_{lj} D_k^j + A_{kl} D \right). \quad (1.82)$$

В частном случае, когда пространство не вращается, H_{lkij} и C_{lkij} совпадают. Это также верно для H_{lk} и C_{lk} . В этом частном случае тензор $C_{lk} = h^{ij} C_{ilkj}$ имеет вид

$$C_{lk} = \frac{* \partial}{\partial x^k} \left(\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^l} \right) - \frac{* \partial \Delta_{kl}^i}{\partial x^i} + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^i - \Delta_{kl}^m \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^m}. \quad (1.83)$$

Зельманов также вывел формулы х.и.-проекций тензора кривизны Римана-Кристоффеля.

Тензор Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, будучи двухпарным симметричным тензором (его парные индексы несимметричны внутри каждой пары, а пары симметричны друг относительно друга), имеет три х.и.-проекции согласно формуле (1.29) хронометрически инвариантного формализма

$$X^{ik} = -c^2 \frac{R_{0 \cdot 0}^{i \cdot k}}{g_{00}}, \quad Y^{ijk} = -c \frac{R_{0 \dots}^{ijk}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad Z^{ijkl} = c^2 R^{ijkl}. \quad (1.84)$$

Подставляя компоненты тензора Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в формулы его х.и.-проекций (1.84) и опуская индексы, Зельманов

получил формулы

$$X_{ij} = \frac{* \partial D_{ij}}{\partial t} - (D_i^l + A_i^l)(D_{jl} + A_{jl}) + \\ + (* \nabla_i F_j + * \nabla_j F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_j, \quad (1.85)$$

$$Y_{ijk} = * \nabla_i (D_{jk} + A_{jk}) - * \nabla_j (D_{ik} + A_{ik}) + \frac{2}{c^2} A_{ij} F_k, \quad (1.86)$$

$$Z_{iklj} = D_{ik} D_{lj} - D_{il} D_{kj} + A_{ik} A_{lj} - \\ - A_{il} A_{kj} + 2 A_{ij} A_{kl} - c^2 C_{iklj}, \quad (1.87)$$

где $Y_{(ijk)} = Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$ как в тензоре Римана-Кристоффеля. Пошаговая свёртка наблюдаемой пространственной проекции Z_{iklj} как $Z_{il} = h^{kj} Z_{iklj}$ и $Z = h^{il} Z_{il}$ даёт

$$Z_{il} = D_{ik} D_l^k - D_{il} D + A_{ik} A_l^k + 2 A_{ik} A_l^k - c^2 C_{il}, \quad (1.88)$$

$$Z = h^{il} Z_{il} = D_{ik} D^{ik} - D^2 - A_{ik} A^{ik} - c^2 C. \quad (1.89)$$

В конце нашего обзора хронометрически инвариантного формализма рассмотрим уравнения поля Эйнштейна*

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (1.90)$$

Уравнения поля, кроме фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, включают: тензор Риччи $R_{\alpha\beta} = R^{\dots\sigma}_{\alpha\sigma\beta}$. (симметричный тензор 2-го ранга — свёртка тензора кривизны Римана-Кристоффеля), риманову скалярную кривизну $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$, гравитационную постоянную Эйнштейна $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 18,6 \times 10^{-28}$ см/грамм, гравитационную постоянную Гаусса $G = 6,672 \times 10^{-8}$ см³грамм⁻¹сек⁻², тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ распределённой материи, заполняющей данное пространство, а также λ -член [см⁻²], характеризующий физический вакуум. См. §5.2 книги [18], где мы рассмотрели уравнения Эйнштейна и свойства физического вакуума в деталях.

Ландау и Лифшиц [20] используют $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ вместо $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, используя Зельмановым. Чтобы понять причину, положим $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}$,

* Левую часть уравнений поля (1.90) часто называют *тензором Эйнштейна* $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$, в обозначениях $G_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$.

как в теории хронометрических инвариантов и в наших работах, и рассмотрим х.и.-проекции тензора энергии-импульса

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}, \quad J^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik}, \quad (1.91)$$

которые вычисляются по формуле (1.29) как проекции любого симметричного тензора 2-го ранга. Они имеют следующий физический смысл: ρ есть наблюдаемая плотность массы, J^i есть наблюдаемая плотность импульса, U^{ik} есть наблюдаемый тензор напряжений. Тензор Риччи имеет размерность $[\text{см}^{-2}]$. Поэтому скалярная х.и.-проекция уравнений поля $\frac{G_{00}}{g_{00}} = -\frac{\varkappa T_{00}}{g_{00}} + \lambda$ и величина $\frac{\varkappa T_{00}}{g_{00}} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$ имеют одну и ту же размерность $[\text{см}^{-2}]$. Следовательно, тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ имеет ту же размерность, что и плотность массы $[\text{грамм}/\text{см}^3]$. Следовательно, если бы мы подставили $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, то в правой части уравнений поля мы использовали бы не тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, а величину $c^2 T_{\alpha\beta}$.

Х.и.-проекции уравнений Эйнштейна (1.90) вычисляются как проекции тензора 2-го ранга (1.29). Они имеют вид (мы называем их *х.и.-уравнениями Эйнштейна*)

$$\begin{aligned} \frac{* \partial D}{\partial t} + D_{jl} D^{lj} + A_{jl} A^{lj} + \left(* \nabla_j - \frac{1}{c^2} F_j \right) F^j = \\ = -\frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 + U) + \lambda c^2, \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$* \nabla_j (h^{ij} D - D^{ij} - A^{ij}) + \frac{2}{c^2} F_j A^{ij} = \varkappa J^i, \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{* \partial D_{ik}}{\partial t} - (D_{ij} + A_{ij})(D_k^j + A_k^j) + DD_{ik} - D_{ij} D_k^j + \\ + 3A_{ij} A_k^j + \frac{1}{2} (* \nabla_i F_k + * \nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ = \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}) + \lambda c^2 h_{ik}, \end{aligned} \quad (1.94)$$

где $U = h^{ik} U_{ik}$ след тензора напряжений U_{ik} .

Кроме того, тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ распределённой материи должен удовлетворять закону сохранения

$$\nabla_\sigma T^{\alpha\sigma} = 0. \quad (1.95)$$

Х.и.-проекции закона сохранения вычисляются как проекции тензора первого ранга (1.28). Мы называем их *х.и.-уравнениями закона сохранения*. Они имеют вид

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} + D\rho + \frac{1}{c^2} D_{ij} U^{ij} + * \widetilde{\nabla}_i J^i - \frac{1}{c^2} F_i J^i = 0, \quad (1.96)$$

$$\frac{* \partial J^k}{\partial t} + D J^k + 2(D_i^k + A_i^k) J^i + * \widetilde{\nabla}_i U^{ik} - \rho F^k = 0, \quad (1.97)$$

где х.и.-оператор $* \widetilde{\nabla}_i = * \nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$ построен на основе х.и.-оператора дифференцирования $* \nabla_i$.

Зная эти определения, мы можем найти, как устроен любой геометрический объект четырёхмерного псевдориманова пространства (пространства-времени общей теории относительности) с точки зрения любого наблюдателя, местонахождением которого является это пространство. Например, имея какое-либо уравнение, полученное в общековариантном тензорном анализе, мы можем вычислить его х.и.-проекции на линию времени и пространственное сечение любой конкретной системы отсчёта, а затем выразить эти х.и.-проекции через физически наблюдаемые свойства этого пространства отсчёта. Таким образом, мы придём к полноценным уравнениям, содержащим только величины, измеримые на практике.

Итак, теперь у нас есть все математические “инструменты”, необходимые для дальнейшего построения математической теории внутреннего строения звёзд и источников звёздной энергии в соответствии с общей теорией относительности.

2.1 Введение метрики пространства обычной звезды. Уравнения Эйнштейна, удовлетворяющие этой метрике

В этой главе мы представляем нашу математическую теорию жидких звёзд в применении к обычным звёздам. Это означает тип I по новой классификации, которую мы только что ввели согласно общей теории относительности (см. §1.2 и таблицу 1.1). Тип I охватывает широчайшее разнообразие звёзд, которое включает сверхгиганты, солнцеподобные звёзды (включая Солнце), обычные карлики и белые карлики*.

Структура, вещество и поле жидкой звезды описываются метрикой Шварцшильда для сферы, заполненной несжимаемой жидкостью. Эта метрика была первоначально введена в 1916 году Карлом Шварцшильдом [14]. Он, однако, ввёл её в урезанном виде, содержащем существенные ограничения: он искусственно наложил эти ограничения при выводе, чтобы сделать поле непрерывным, без разрывов, что привело к искусственно урезанной геометрии данного метрического пространства. Другими словами, метрика, введенная Карлом Шварцшильдом, — не совсем настоящая метрика пространства жидкой сферы. Истинная метрика сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, которая свободна от указанных ограничений и, таким образом, учитывает разрыв пространства, была выведена в 2009 г. Л. Борисовой [11, 12]. Сейчас мы повторим этот вывод в соответствии с её наиболее подробным объяснением [11], наряду с некоторыми последними поправками и комментариями.

Рассмотрим пустое пространство, в котором находится сферический остров, представляющий собой жидкость. Структура, вещество и поле такого массивного острова должны характеризовать

* В эддингтоновской теории газообразных звёзд белые карлики рассматриваются отдельно.

ся метрикой пространства, обладающего сферической симметрией. Как известно, все сферически-симметричные метрики имеют следующий общий вид

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

где e^ν и e^λ суть функции от r и t .

Вещество и поле сферического жидкого острова должны удовлетворять уравнениям поля Эйнштейна (1.90), в которых в рассматриваемом случае мы пренебрегаем λ -полем, т.е.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

где $R_{\alpha\beta}$ тензор кривизны Риччи, R скалярная кривизна, $T_{\alpha\beta}$ тензор энергии-импульса распределённой материи (жидкости), тогда как $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 18,6 \times 10^{-28}$ см/грамм гравитационная постоянная Эйнштейна. Заметим, что тензор энергии-импульса распределённой материи должен удовлетворять закону сохранения

$$\nabla_\sigma T^{\alpha\sigma} = 0, \quad (2.3)$$

где ∇_σ четырёхмерный символ обычного общековариантного дифференцирования.

Уравнения поля Эйнштейна связывают компоненты фундаментального метрического тензора, кривизну пространства и распределённую материю в соответствии с римановой геометрией. Другими словами, инвариантная квадратичная форма римановой метрики $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = inv$ вместе с уравнениями Эйнштейна характеризуют римановы пространства (пространства с римановой геометрией). Применительно к общей теории относительности это означает следующее. Пусть у нас есть риманово пространство с метрикой ds^2 и мы предполагаем, что в нём распределена материя (тем самым мы предполагаем конкретную формулу для тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$). Тогда компоненты фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, известные из формулы метрики ds^2 , и компоненты конкретного тензора энергии-импульса, будучи подставленными в, соответственно, левую и правую части уравнений Эйнштейна должны преобразовать эти уравнения в тождества.

Вот как на основе общих формул сферически-симметричной метрики (2.1) можно вывести метрику сферы, заполненной идеальной жидкостью. Во-первых, мы возьмём тензор энергии-импульса идеальной жидкости и подставим его компоненты в правую часть уравнений поля. Затем мы находим компоненты фундаментального метрического тензора из формулы сферически-симметричной метрики (2.1) в их общем виде, содержащем коэффициенты e^ν и e^λ . Подставим эти компоненты в левую часть уравнений поля. Затем мы посмотрим, какой вид коэффициентов e^ν и e^λ делает левую часть уравнений поля такой же, как и правая (тем самым превращая уравнения поля в тождества). Наконец, подставляем полученные частные формулы для коэффициентов e^ν и e^λ обратно в общую формулу сферически-симметричной метрики. В результате мы получаем истинную метрику сферы, заполненной идеальной жидкостью. Voilà!

С таким же успехом можно было бы спросить, почему сам Шварцшильд не поступил именно так? Вместо этого, почему он пошёл другим сложным путём, полным предположений? На этот вопрос нет ответа. . . Вернёмся к нашей дедукции.

Как известно, тензор энергии-импульса идеальной жидкости (несжимаемой и невязкой) имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

где $\rho = \rho_0 = \text{const}$ плотность жидкости (она является постоянной), p давление в жидкости, а величина

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad U_\alpha U^\alpha = 1 \quad (2.5)$$

обозначает четырёхмерную скорость потока жидкости относительно наблюдателя (его пространство отсчёта совпадает с пространством жидкой сферы, в центре которой — начало координат).

Теперь запишем уравнения поля в покомпонентном виде с учётом физически наблюдаемых свойств пространства, связанного с жидкой сферой.

Компоненты $g_{\alpha\beta}$ имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= e^\nu, & g_{0i} &= 0 \\ g_{11} &= -e^\lambda, & g_{22} &= -r^2, & g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

в метрике сферически-симметричных пространств (2.1). Согласно хронометрически инвариантному формализму (см. §1.3), гравитационный потенциал в таком пространстве имеет вид

$$w = c^2 \left(1 - e^{\frac{\nu}{2}}\right). \quad (2.7)$$

Так как $g_{0i} = 0$ в этой метрике, то пространство этой метрики не вращается, т.е. линейная скорость его вращения равна нулю: $v_i = 0$. Следовательно, х.и.-тензор угловой скорости вращения пространства с этой метрикой равен нулю

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_k - F_k v_i) = 0, \quad (2.8)$$

а х.и.-вектор гравитационно-инерциальной силы имеет вид

$$F_i = \frac{c^2}{c^2 - w} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -\frac{c^2}{2} \nu', \quad (2.9)$$

где штрих обозначает дифференцирование по радиальной координате r . При этом х.и.-метрический тензор h_{ik} пространства имеет следующие ненулевые компоненты

$$h_{11} = e^\lambda, \quad h_{22} = r^2, \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.10)$$

$$h^{11} = e^{-\lambda}, \quad h^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad h^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.11)$$

$$h = \det \|h_{ik}\| = e^\lambda r^4 \sin^2 \theta. \quad (2.12)$$

Так как х.и.-тензор скорости деформации пространства D_{ik} определяется через х.и.-производные от h_{ik} , он имеет только следующие ненулевые компоненты

$$D_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda - \frac{\nu}{2}}, \quad D^{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\lambda - \frac{\nu}{2}}, \quad D = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\frac{\nu}{2}}, \quad (2.13)$$

где верхняя точка обозначает дифференцирование по временной координате t .

Х.и.-символы Кристоффеля (они характеризуют физически наблюдаемую неоднородность пространства) вычисляются по их определению, данному в §1.3, через компоненты х.и.-метрического

тензора h_{ik} . После некоторых вычислений получаем

$$\Delta_{11,1} = \frac{\lambda'}{2} e^\lambda, \quad \Delta_{22,1} = -r, \quad \Delta_{33,1} = -r \sin^2 \theta, \quad (2.14)$$

$$\Delta_{12,2} = r, \quad \Delta_{33,2} = -r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.15)$$

$$\Delta_{13,3} = r \sin^2 \theta, \quad \Delta_{23,3} = r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.16)$$

$$\Delta_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Delta_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Delta_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, \quad (2.17)$$

$$\Delta_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (2.18)$$

$$\Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta. \quad (2.19)$$

В пространстве без вращения х.и.-тензор кривизны 2-го ранга $C_{lk} = h^{ij} C_{ilkj}$ имеет вид (1.83). После некоторых вычислений мы получаем ненулевые компоненты C_{lk} для сферически-симметричной метрики без вращения (2.1). Они имеют вид

$$C_{11} = -\frac{\lambda'}{r}, \quad C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2 \theta} = e^{-\lambda} \left(1 - \frac{r\lambda'}{2} \right) - 1. \quad (2.20)$$

Вычислим х.и.-проекции тензора энергии-импульса идеальной жидкости (2.4) по общим формулам (1.91). Это — наблюдаемая плотность массы ρ , наблюдаемая плотность импульса J^i и наблюдаемый тензор напряжений U^{ik} жидкости. Подставляя $b^i = 0$ и $b^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$ (1.25), характеризующие сопутствующую систему отсчёта (в данном случае наблюдатель сопутствует жидкой сфере), получаем

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho_0, \quad J^i = \frac{cT_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik} = p h^{ik}, \quad (2.21)$$

откуда также имеем для $U = h^{ik} U_{ik}$

$$U = 3p. \quad (2.22)$$

Первая х.и.-компонента означает, что плотность ρ жидкой среды постоянна всюду внутри сферы. Полученное условие $J^i = 0$ означает, что жидкость не течёт, тогда как $U^{ik} = p h^{ik}$ означает, что пространство отсчёта наблюдателя сопутствует жидкой среде.

Теперь х.и.-уравнения Эйнштейна (1.92–1.94) в пространстве без вращения принимают упрощённую форму

$${}^* \frac{\partial D}{\partial t} + D_{jl} D^{lj} + \left({}^* \nabla_j - \frac{1}{c^2} F_j \right) F^j = -\frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 + U), \quad (2.23)$$

$${}^* \nabla_j (h^{ij} D - D^{ij}) = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^* \partial D_{ik}}{\partial t} - D_{ij} D_k^j + D D_{ik} - D_{ij} D_k^j + \frac{1}{2} ({}^* \nabla_i F_k + {}^* \nabla_k F_i) - \\ - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где ${}^* \nabla_i$ символ х.и.-дифференцирования. Х.и.-уравнения закона сохранения (1.96–1.97) также упрощаются до

$$D\rho_0 + \frac{1}{c^2} D_{ij} U^{ij} = 0, \quad (2.26)$$

$$\widetilde{\nabla}_i U^{ik} - \rho_0 F^k = 0, \quad (2.27)$$

где мы обозначаем $\widetilde{\nabla}_i = {}^* \nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$.

Подставим в х.и.-уравнения Эйнштейна (2.23–2.25) х.и.-характеристики пространства сферически-симметричной метрики (2.1), а также х.и.-компоненты тензора энергии-импульса идеальной жидкости. После некоторых вычислений получаем х.и.-уравнения Эйнштейна (2.23–2.25) в покомпонентной записи

$$\begin{aligned} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - c^2 e^{-\lambda} \left[\nu'' - \frac{\lambda' \nu'}{2} + \frac{2\nu'}{r} + \frac{(\nu')^2}{2} \right] = \\ = -\kappa (\rho_0 c^2 + 3p) e^\lambda, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{r} e^{-\lambda - \frac{\nu}{2}} = 0, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda - \nu} \left(\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - c^2 \left[\nu'' - \frac{\lambda' \nu'}{2} + \frac{(\nu')^2}{2} \right] + \frac{2c^2 \lambda'}{r} = \\ = \kappa (\rho_0 c^2 - p) e^\lambda, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{c^2 (\lambda' - \nu')}{r} e^{-\lambda} + \frac{2c^2}{r^2} (1 - e^{-\lambda}) = \kappa (\rho_0 c^2 - p). \quad (2.31)$$

Второе уравнение показывает, что в этом случае $\dot{\lambda} = 0$. Это означает, что внутреннее пространство жидкой сферы не деформируется: согласно (2.13) при $\dot{\lambda} = 0$ мы имеем $D_{11} = 0$, $D^{11} = 0$ и $D = 0$. Учитывая это обстоятельство, а также стационарность λ , приводим уравнения поля (2.28–2.31) к окончательному виду

$$c^2 e^{-\lambda} \left[v'' - \frac{\lambda' v'}{2} + \frac{2v'}{r} + \frac{(v')^2}{2} \right] = \kappa (\rho_0 c^2 + 3p) e^{\lambda}, \quad (2.32)$$

$$\frac{2c^2 \lambda'}{r} - c^2 \left[v'' - \frac{\lambda' v'}{2} + \frac{(v')^2}{2} \right] = \kappa (\rho_0 c^2 - p) e^{\lambda}, \quad (2.33)$$

$$\frac{c^2 (\lambda' - v')}{r} e^{-\lambda} + \frac{2c^2}{r^2} (1 - e^{-\lambda}) = \kappa (\rho_0 c^2 - p). \quad (2.34)$$

Для решения уравнений поля (2.32–2.34) нам нужна формула для давления p . Чтобы найти эту формулу, мы рассмотрим уравнения сохранения (2.26–2.27). Однако из-за отсутствия деформации пространства в рассматриваемом случае ($D_{ik} = 0$) х.и.-скалярное уравнение сохранения (2.26) вымывается. Остаётся только х.и.-векторное уравнение сохранения (2.27). Он принимает вид

$${}^* \nabla_i (p h^{ik}) - \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (2.35)$$

Так как ${}^* \nabla_i h^{ik} = 0$ всегда истинно для х.и.-метрического тензора (как и условие $\nabla_\sigma g^{\alpha\sigma} = 0$ для фундаментального метрического тензора), оставшееся уравнение сохранения (2.35) принимает вид

$$h^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (2.36)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ в пространстве без вращения, эта формула сводится к нетривиальному уравнению, имеющему вид

$$p' e^{-\lambda} + \left(\rho_0 c^2 + p \right) \frac{v'}{2} e^{-\lambda} = 0, \quad (2.37)$$

где $p' = \frac{dp}{dr}$, $v' = \frac{dv}{dr}$ и $e^{-\lambda} \neq 0$. Разделив обе части этого уравнения (2.37) на $e^{-\lambda}$, мы получаем уравнение

$$\frac{dp}{\rho_0 c^2 + p} = -\frac{dv}{2}, \quad (2.38)$$

которое представляет собой простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Оно легко интегрируется как

$$\rho_0 c^2 + p = B e^{-\frac{\nu}{2}}, \quad B = \text{const.} \quad (2.39)$$

Таким образом, мы получаем давление p как функцию от ν

$$p = B e^{-\frac{\nu}{2}} - \rho_0 c^2. \quad (2.40)$$

При поиске функции $p(r)$, мы интегрируем уравнения поля (2.32–2.34). Суммируя (2.32) и (2.33), мы находим

$$\frac{c^2 (\lambda' + \nu')}{r} = \kappa B e^{\lambda - \frac{\nu}{2}}. \quad (2.41)$$

Выразим отсюда ν' , затем подставим результат в (2.34). В результате мы получаем

$$\frac{2c^2}{r} \lambda' + \frac{2c^2}{r^2} (e^\lambda - 1) - \kappa B e^{-\lambda - \frac{\nu}{2}} = \kappa (\rho_0 c^2 - p) e^\lambda. \quad (2.42)$$

Подставив p из (2.40) в (2.42), получаем следующее дифференциальное уравнение относительно λ

$$\lambda' + \frac{e^\lambda - 1}{r} - \kappa \rho_0 r e^\lambda = 0. \quad (2.43)$$

Введём новую переменную $y = e^\lambda$. Таким образом, $\lambda' = \frac{y'}{y}$. Подставляя в это уравнение y и y' , получаем уравнение Бернулли (см. Камке [31], часть III, глава I, §1.34)

$$y' + f(r)y^2 + g(r)y = 0, \quad (2.44)$$

где

$$f(r) = \frac{1}{r} - \kappa \rho_0 r, \quad g(r) = -\frac{1}{r}. \quad (2.45)$$

Оно имеет следующее решение

$$\frac{1}{y} = E(r) \int \frac{f(r) dr}{E(r)}, \quad (2.46)$$

где

$$E(r) = e^{\int g(r) dr}. \quad (2.47)$$

Интегрируя (2.47), получаем $E(r)$, т.е.

$$E(r) = e^{-\int \frac{dr}{r}} = e^{\ln \frac{L}{r}} = \frac{L}{r}, \quad L = \text{const} > 0, \quad (2.48)$$

таким образом, мы получаем $\frac{1}{y} = e^{-\lambda}$, что равно

$$e^{-\lambda} = \frac{L}{r} \int \frac{r}{L} \left(\frac{1}{r} - \kappa \rho_0 r \right) dr = 1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3} + \frac{Q}{r}, \quad Q = \text{const}. \quad (2.49)$$

Чтобы найти константу интегрирования Q , перепишем уравнение (2.42) как

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \kappa \rho_0. \quad (2.50)$$

Это уравнение имеет сингулярность в точке $r = 0$, где численное значение правого члена уравнения (плотность жидкости) возрастет до бесконечности при $r \rightarrow 0$, т.е. в центре сферы. Это противоречит изначально принятому условию $\rho_0 = \text{const}$, характеризующему несжимаемые жидкости. По сути, этого противоречия не должно быть в теории. Мы устраним это противоречие (и сингулярность), переписав (2.50) в виде

$$e^{-\lambda} (1 - r\lambda') = \frac{d}{dr} (r e^{-\lambda}) = 1 - \kappa \rho_0 r^2. \quad (2.51)$$

После интегрирования получаем

$$r e^{-\lambda} = r - \frac{\kappa \rho_0 r^3}{3} + A, \quad A = \text{const}. \quad (2.52)$$

Поскольку постоянная интегрирования $A = 0$ в центральной точке $r = 0$, она должна быть равна нулю и в любой другой точке. Разделив это уравнение на $r \neq 0$, получим

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}. \quad (2.53)$$

Сравнивая это решение с формулой для $e^{-\lambda}$, полученной ранее (2.49), мы видим, что они совпадают, если $Q = 0$. Кроме того, следует предположить, что $e^{\lambda_0} = 1$ в центральной точке $r = 0$, следовательно, $\lambda_0 = 0$.

Таким образом, мы получили компоненты $h^{11} = e^{-\lambda}$ и $h_{11} = e^{\lambda}$ х.и.-метрического тензора h_{ik} в виде, выраженном через радиальную координату r , т.е.

$$h^{11} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}, \quad h_{11} = e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}. \quad (2.54)$$

Далее мы вводим пограничное условие $r = a$ на поверхности сферы, где a радиус сферы. Таким образом,

$$e^{-\lambda_a} = 1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}. \quad (2.55)$$

С другой стороны, решение этого уравнения также является решением для точечной массы в пустоте. Следовательно,

$$e^{-\lambda_a} = 1 - \frac{2GM}{c^2 a}, \quad (2.56)$$

где M масса жидкой сферы. Сравнивая обе эти формулы для $e^{-\lambda_a}$ и принимая во внимание, что гравитационная постоянная Эйнштейна равна $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, мы находим

$$M = \frac{4\pi a^3 \rho_0}{3} = \rho_0 V, \quad (2.57)$$

где $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ объём сферы. Таким образом, мы получили обычную связь между массой и объёмом однородной сферы.

Следующим нашим шагом будет поиск решения $e^{-\lambda}$ вне сферы, где $r > a$. Поскольку вне жидкой сферы плотность вещества равна $\rho_0 = 0$, после интегрирования (2.51) получаем

$$r e^{-\lambda} = \int_0^r dr - \int_0^a \kappa\rho_0 r^2 dr = r - \frac{\kappa\rho_0 a^3}{3}. \quad (2.58)$$

Из этой формулы мы получаем, что

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa\rho_0 a^3}{3r}. \quad (2.59)$$

Принимая во внимание (2.55) и (2.56), мы приходим к такому же решению, что и решение для точечной массы в пустоте

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (2.60)$$

Для получения переменной v используем уравнение (2.41). Подставляя

$$\lambda' = \frac{\frac{2\kappa\rho_0 r}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \quad (2.61)$$

а также полученную формулу для e^λ в (2.41), после преобразований получаем

$$v' + \frac{\frac{2\kappa\rho_0 r^2}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} - \frac{\kappa B}{c^2} \frac{r e^{-\frac{v}{2}}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = 0. \quad (2.62)$$

Введём новую переменную $e^{-\frac{v}{2}} = y$. Таким образом, $v' = -\frac{2y'}{y}$. Подставляя их в (2.62), мы получаем уравнение Бернулли

$$y' + \frac{\kappa B}{2c^2} \frac{r y^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} - \frac{\frac{\kappa\rho_0 r}{3} y}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = 0, \quad (2.63)$$

где

$$f(r) = \frac{\kappa B}{2c^2} \frac{r}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad g(r) = -\frac{\frac{\kappa\rho_0 r}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}. \quad (2.64)$$

Таким образом, мы имеем интеграл

$$\int g(r) dr = -\int \frac{\frac{\kappa\rho_0 r}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \ln N \sqrt{\left|1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right|}, \quad N = const, \quad (2.65)$$

где

$$E(r) = N \sqrt{\left|1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right|}. \quad (2.66)$$

В области, где выполняется сигнатурное условие $h_{11} = e^\lambda > 0$, мы имеем

$$1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3} > 0, \quad (2.67)$$

поэтому мы используем здесь модуль функции.

Далее мы ищем $\frac{1}{y} = e^{\frac{v}{2}}$, что равно

$$e^{\frac{v}{2}} = \frac{\kappa B}{2c^2} \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \int \frac{r dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right)^3}}. \quad (2.68)$$

После интегрирования мы получаем

$$e^{\frac{y}{2}} = \frac{\kappa B}{2c^2} \left(\frac{3}{\kappa\rho_0} + K \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \right), \quad K = const. \quad (2.69)$$

Теперь найдём константы B и K . Чтобы найти B , перепишем формулу для давления p (2.40) при условии, что $p = 0$ на поверхности сферы ($r = a$). Таким образом, мы получаем

$$B = \rho_0 c^2 e^{\frac{y_a}{2}}, \quad (2.70)$$

где $e^{\frac{y_a}{2}}$ есть значение функции $e^{\frac{y}{2}}$ на поверхности сферы. В итоге мы имеем

$$e^{\frac{y}{2}} = \frac{\kappa\rho_0}{2} e^{\frac{y_a}{2}} \left(\frac{3}{\kappa\rho_0} + K \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \right). \quad (2.71)$$

Чтобы найти K , мы рассмотрим значение функции $e^{\frac{y}{2}}$ на поверхности сферы ($r = a$)

$$e^{\frac{y_a}{2}} = \frac{\kappa\rho_0 e^{\frac{y_a}{2}}}{2} \left(\frac{3}{\kappa\rho_0} + K \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} \right), \quad (2.72)$$

откуда получаем, что

$$K = -\frac{1}{\kappa\rho_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}}. \quad (2.73)$$

Величина $e^{\frac{y_a}{2}}$ означает численное значение $e^{\frac{y}{2}}$ при $r = a$, т.е. на поверхности сферы. Следовательно, мы можем применить его к решению для точечной массы в пустоте при $r = a$, т.е.

$$e^{\frac{y_a}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}}. \quad (2.74)$$

Принимая во внимание формулы (2.55) и (2.56), получаем

$$\begin{aligned} e^{\frac{y}{2}} &= \frac{1}{2} e^{\frac{y_a}{2}} \left(3 - \sqrt{\frac{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}} - \sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{c^2 a^3}} \right). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Это решение на поверхности сферы ($r = a$) соответствует решению для точечной массы в пустоте: $e^{\frac{y_a}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}} = \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}}$.

Таким образом, с учётом полученных формул для ν и λ , метрика пространства сферы, заполненной идеальной жидкостью, имеет следующий вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.76)$$

Принимая во внимание (2.55) и (2.56), мы перепишем эту формулу (2.76) в виде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}} - \sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{c^2 a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM r^2}{c^2 a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.77)$$

Наконец, поскольку $\frac{2GM}{c^2} = r_g$ есть гильбертов радиус, вычисляемый по массе M жидкой сферы, и принимая во внимание полученную формулу для $e^{\frac{y_a}{2}}$, мы переписываем полученную метрику в окончательном виде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.78)$$

Это — окончательная формула для “внутренней” метрики пространства сферы, заполненной идеальной жидкостью. Как видно, “внутренняя” метрика на поверхности жидкой сферы ($r = a$) полностью совпадает с метрикой точечной массы в пустоте.

Отсюда мы можем получить метрику пространства вне жидкой сферы ($r > a$). Давайте сделаем это.

Мы уже получили “внешнее” решение для $e^{-\lambda}$ (2.59), которое оказалось совпадающим с “внешним” решением для точечной массы для этой функции (2.60). Вне сферы $B = 0$ (2.39). Следовательно, (2.41) принимает вид

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad (2.79)$$

где, согласно (2.60),

$$\lambda' = \frac{2GM}{c^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (2.80)$$

Подставляя (2.80) в (2.79), затем интегрируя полученное уравнение, мы получаем

$$\nu = \ln \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) + P, \quad P = \text{const}, \quad (2.81)$$

так что

$$e^\nu = P \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (2.82)$$

Поскольку эта функция также имеет вид

$$e^\nu = 1 - \frac{2GM}{c^2 a}, \quad (2.83)$$

на поверхности ($r = a$) жидкой сферы мы получаем $P = 1$. Подставляя полученные формулы для e^ν (2.83) и e^λ (2.60) в сферически-симметричную метрику (2.1), мы получаем, что “внешнее” пространство сферы, заполненной идеальной жидкостью, описывается метрикой точечной массы в пустоте (1.1), т.е.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.84)$$

2.2 Внешний разрыв пространства поля Солнца совпадает с поясом астероидов

Здесь мы предлагаем новую модель Солнечной системы в соответствии с общей теорией относительности. А именно — Солнце и планеты будем считать жидкими сферами согласно метрике жидкой сферы (2.78), полученной нами выше. Эта метрика также была приведена в формуле (1.8), в §1.2, где мы рассматривали постановку

задачи моделирования звезды в терминах общей теории относительности. Также, как было доказано в предыдущем §2.1, внешнее пространство жидкой сферы описывается метрикой точечной массы в пустоте (1.1).

Обратите внимание, что здесь мы не обсуждаем, могут ли внутренние планеты быть представлены в виде жидких сфер или нет. Астрофизики и геологи могут просто апеллировать к магме, потому что она находится в состоянии жидкого камня. Однако юпитерианские планеты (Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун) по плотности и другим параметрам вполне могут считаться звёздами. Здесь мы ограничиваемся только теоретическим моделированием Солнца и планет без анализа их происхождения. Подробно мы сосредоточимся на расположении “внутреннего” и “внешнего” пространственных разрывов их полей: пространственных разрывов в поле внутри и вне физического тела (жидкой сферы) каждой из них. Затем мы сравним полученный результат с наблюдаемым распределением планет в Солнечной системе.

Наш подход к Солнечной системе прост. Как известно, в четырёхмерном римановом пространстве со знакопеременной диагональной метрикой (+---) разрыв происходит в той области (точке или поверхности) пространства, где хотя бы одно из четырёх сигнатурных условий

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &> 0 \\ g_{00} g_{11} &< 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &> 0 \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

нарушается. Пространство (пространство-время) общей теории относительности относится к такому типу римановых пространств. Поэтому мы рассматриваем сигнатурные условия в пространстве внутри и вне жидкого Солнца.

2.2.1 В метрике “внутреннего” пространства жидкой сферы (2.78), учитывая, что там*

$$\frac{\kappa \rho_0 a^3}{3r} = \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{r_g}{r}, \quad (2.86)$$

* См. формулы (2.59) и (2.60) в §2.1.

фундаментальный метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} = -\frac{1}{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.88)$$

$$g_{22} = -r^2, \quad (2.89)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.90)$$

Из этих компонент мы получаем, что на расстоянии от центра сферы, равном

$$r = r_{br} = \sqrt{\frac{a^3}{r_g}} = \sqrt{\frac{3}{\kappa \rho_0}}, \quad (2.91)$$

нарушаются второе, третье и четвёртое сигнатурные условия*

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \frac{9}{4} \left(1 - \frac{r_g}{a} \right) > 0 \\ g_{00} g_{11} &\rightarrow -\infty \\ g_{00} g_{11} g_{22} &\rightarrow \infty \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\}. \quad (2.92)$$

Это означает, что на расстоянии $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$ от центра жидкого сферического тела его поле имеет пространственный разрыв на сферической поверхности упомянутого радиуса r_{br} .

Гильбертов радиус $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ (радиус гравитационного коллапса), рассчитанный для обычных физических тел, на много порядков меньше их физических размеров. То есть $a \gg r_g$ для обычного сферического жидкого тела (такое тело не является коллапсаром).

*А именно — эти три функции стремятся к бесконечности. Как известно, функция имеет разрыв при стремлении к бесконечности.

Следовательно, в этом случае $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} \gg a$: сферическая поверхность пространственного разрыва в поле расположена далеко вне физической поверхности жидкой сферы (источника поля) и, таким образом, далеко от её внутреннего поля. Другими словами, внутреннее поле и вещество жидкой сферы производят пространственный разрыв в её внешнем поле.

Что означает пространственный разрыв поля звезды с физической точки зрения? Имеет ли этот пространственный разрыв реальное влияние на физическое тело, попадающее в него, или это — всего лишь математическая фикция? Как мы покажем в §2.3, пространство (пространство-время) жидкой сферы имеет разрыв четырёхмерного тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ при условии $r = r_{br}$. А именно, компонента R_{0101} (2.113), представляющая собой четырёхмерную кривизну пространства в $(r-t)$ -направлении 0101, имеет разрыв на расстоянии $r = r_{br}$ от центра жидкой сферы: функция кривизны становится бесконечной ($R_{0101} \rightarrow \infty$) на поверхности радиусом $r = r_{br}$. Поскольку четырёхмерная кривизна определяется гравитационным полем, заполняющим пространство, и наоборот, то разрыв на $r = r_{br}$ подразумевает разрыв в гравитационном поле жидкой сферы.

В этом заключается физический смысл пространственного разрыва в поле жидкой сферы.

2.2.2 Внешнее поле жидкой сферы обусловлено тем же жидким веществом, которое заполняет сферу и создаёт поле внутри самой сферы (её внутреннее поле). Согласно метрике “внешнего” пространства (2.84), мы видим, что его фундаментальный метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (2.93)$$

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (2.94)$$

$$g_{22} = -r^2, \quad (2.95)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2\theta. \quad (2.96)$$

Мы видим, что на расстоянии

$$r = r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.97)$$

от центра тела нарушается первое сигнатурное условие ($g_{00} > 0$)

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{r_g}{r} = 0 \\ g_{00} g_{11} &= -1 < 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &= r^2 > 0 \\ g &= -r^4 \sin^2 \theta < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.98)$$

Другими словами, внешнее поле жидкой сферы производит разрыв пространства в глубине самой сферы, вблизи её центра. Например, рассчитанный гильбертов радиус $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ для Солнца составляет всего 2,9 км, а для Земли это всего лишь 0,88 см.

2.2.3 Итак, согласно нашей новой модели жидких звёзд в соответствии с общей теорией относительности, применительно к обычным звёздам и, в частности, к Солнцу, из вышеприведённых выводов вытекает следующее:

1. В центре каждой звезды существует небольшое ядро гильбертова радиуса r_g от её центра, на котором происходит упомянутый внутренний пространственный разрыв в поле звезды. Внутренний пространственный разрыв физически означает, что жидкое вещество звезды имеет сингулярность на сферической поверхности гильбертова радиуса r_g вокруг центра, тем самым это маленькое ядро физически отделено от основной массы вещества звезды (физический смысл этого явления будет понятнее на примере внешнего пространственного разрыва в поле Солнца);
2. Поле каждой звезды имеет внешний пространственный разрыв, окружающий звезду сферической поверхностью. Этот “пузырь” имеет очень большой радиус, равный $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$, что на много порядков превышает физический радиус a звезды. Физически внешний пространственный разрыв препятствует формированию ближнего вещества, такого как мелкие камни или пыль, вращающиеся вокруг звезды, в единую планету на орбите радиусом r_{br} .

Рассчитаем теперь радиус $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ (2.91) внешнего пространственного разрыва в поле Солнца. Подставляя плот-

ность Солнца $\rho_0 = 1,41$ грамм/см³ или его массу $M = 2,0 \times 10^{33}$ грамм и радиус $a = 6,95 \times 10^{10}$ см, мы получаем

$$r_{br} = 3,4 \times 10^{13} \text{ см} = 340\,000\,000 \text{ км} = 2,3 \text{ а.е.} \quad (2.99)$$

Получается, что сферическая поверхность (пузырь) внешнего пространственного разрыва в поле Солнца находится в пределах пояса астероидов, очень близко к орбите максимальной концентрации астероидов (как известно, пояс астероидов расположен примерно от 2,1 до 4,3 а.е. от Солнца).

Это поистине удивительное теоретическое открытие приводит нас к выводу, что внутреннее строение Солнечной системы можно рассчитать по жидкостной модели. А именно — мы считаем Солнце и планеты жидкими сферами, а затем вычисляем внешний пространственный разрыв r_{br} в поле каждого из этих космических тел. Результаты этих расчётов собраны в таблице 2.1.

Эти результаты, связанные с планетами и Солнцем, согласно таблице 2.1, приводят к следующим выводам:

1. Внешний пространственный разрыв в поле Солнца находится на расстоянии $r = 2,3$ а.е. от Солнца, т.е. вблизи максимальной концентрации астероидов в поясе астероидов;
2. Внутренние планеты Солнечной системы (Марс, Земля, Венера и Меркурий) расположены внутри “пузыря” внешнего пространственного разрыва в поле Солнца;
3. “Пузыри” внешнего пространственного разрыва в поле каждой из внутренних планет также расположены внутри “пузыря” внешнего пространственного разрыва в поле Солнца;
4. Внешний пространственный разрыв полей Марса и Земли достигает пояса астероидов;
5. Внешний пространственный разрыв поля Марса находится на расстоянии 2,9 а.е. от Солнца. Он находится в поясе астероидов вблизи орбиты Фэтона, гипотетической планеты, которая когда-то обращалась вокруг Солнца по закону Тициуса-Боде на $r = 2,8$ а.е. и разрушение которой в древности породило пояс астероидов;
6. “Пузырь” внешнего пространственного разрыва в поле Юпитера с внутренней стороны встречается с марсианским на расстоянии $r = 2,9$ а.е. от Солнца (при “параде планет”). Это очень

Объект	Масса M , грамм	Плотность ρ_0 , грамм/см ³	Радиус a , см	Гильбертов радиус r_g , см	Орбита, а.е.	Разрыв r_{br} , а.е.	Расстояние r_{br} от Солнца, а.е.
Солнце	$1,98 \times 10^{33}$	1,41	$6,95 \times 10^{10}$	$2,9 \times 10^5$	—	2,3	2,3
Внутренние планеты							
Меркурий	$2,21 \times 10^{26}$	4,10	$2,36 \times 10^8$	0,03	0,39	1,3	-0,9 – 1,7
Венера	$4,93 \times 10^{27}$	5,10	$6,19 \times 10^8$	0,73	0,72	1,2	-0,5 – 1,9
Земля	$5,97 \times 10^{27}$	5,52	$6,38 \times 10^8$	0,88	1,00	1,1	-0,1 – 2,1
Марс	$6,45 \times 10^{26}$	3,80	$3,44 \times 10^8$	0,10	1,52	1,4	0,1 – 2,9
Пояс астероидов	—	—	—	—	2,5*	—	—
Внешние планеты							
Юпитер	$1,90 \times 10^{30}$	1,38	$7,11 \times 10^9$	280	5,20	2,3	2,9 – 7,5
Сатурн	$5,68 \times 10^{29}$	0,72	$6,00 \times 10^9$	84	9,54	3,2	6,3 – 12,7
Уран	$8,72 \times 10^{28}$	1,30	$2,55 \times 10^9$	13	19,2	2,4	16,8 – 21,6
Нептун	$1,03 \times 10^{29}$	1,20	$2,74 \times 10^9$	15	30,1	2,4	27,7 – 32,5
Плутон	$1,31 \times 10^{25}$	2,00	$1,20 \times 10^8$	0,002	39,5	1,9	37,6 – 41,4
Пояс Койпера	—	—	—	—	30 – 100	—	—

*Максимальная концентрация вещества в поясе астероидов зарегистрирована на $\sim 2,5$ а.е. от Солнца, а пояс астероидов простирается от 2,1 до 4,3 а.е. (приблизительно).

Таблица 2.1: Внутреннее строение Солнечной системы согласно общей теории относительности.

близко к 2,8 а.е., что является теоретической орбитой Фаэтона согласно закону Тициуса-Боде;

7. “Пузыри” внешнего пространственного разрыва в полях других юпитерианских планет (Сатурна, Урана и Нептуна) расположены в пределах внутренней границы пояса Койпера (полосы афелиев комет, обращающихся вокруг Солнца);
8. Внешний пространственный разрыв в поле Нептуна совпадает с внешней стороны этого “пузыря” с внутренней границей пояса Койпера;
9. “Пузырь” внешнего пространственного разрыва в поле Плутона полностью расположен в поясе Койпера.

Тот факт, что внешний пространственный разрыв в поле Солнца находится в пределах пояса астероидов, вблизи максимальной концентрации астероидов, позволяет сказать: да, рассматриваемый в данной работе пространственный разрыв имеет реальный физический смысл. Наиболее вероятно, что именно внешний пространственный разрыв в поле Солнца препятствует объединению астероидов в единое физическое тело (называемое Фаэтон). В качестве альтернативы, если Фаэтон был уже существующей планетой, вращавшейся вокруг Солнца вблизи “орбиты пространственного разрыва” в прошлом, сила гравитации другого массивного космического тела, появившегося вблизи Солнечной системы в древние времена (например, другой звезды, проходившей рядом с ней), сместила Фаэтон на “орбиту разрыва пространства” рядом с ним, что привело к разрушению тела Фаэтона.

Таким образом, мы приходим к выводу, что внутреннее строение Солнечной системы формируется геометрической структурой поля Солнца в соответствии с римановой геометрией, проявляющейся в виде законов общей теории относительности.

2.3 Геометрический смысл разрыва внешнего пространства звезды

Рассмотрим свойства кривизны пространства жидкой сферы. Сначала вычислим компоненты х.и.-тензора кривизны C_{lkij} , который является физически наблюдаемым тензором кривизны.

В невращающемся пространстве ($A_{jk} = 0$) рассматриваемой жидкой сферы, $C_{lkij} = H_{lkij}$ по определению тензора H_{lkij} (1.81). Поэтому

мы вычисляем $C_{lkij} = H_{lkij} = h_{jm} H_{lki}^{\dots m}$ по формуле $H_{lki}^{\dots m}$ (1.78), куда подставляем соответствующие х.и.-символы Кристоффеля Δ_{jk}^i (2.17–2.19), полученные для метрики жидкой сферы (2.78). После вычислений получаем его ненулевые компоненты

$$C_{1212} = H_{1212} = -\frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.100)$$

$$C_{1313} = H_{1313} = -\frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2 \sin^2\theta}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.101)$$

$$C_{2323} = H_{2323} = -\frac{\kappa\rho_0}{3} r^4 \sin^2\theta. \quad (2.102)$$

Мы видим, что в пространстве жидкой сферы ненулевые компоненты тензора наблюдаемой кривизны пространства C_{iklj} удовлетворяют условию

$$C_{iklj} = -\frac{\kappa\rho_0}{3} (h_{kl}h_{ij} - h_{il}h_{kj}), \quad (2.103)$$

где отрицательная константа $-\frac{\kappa\rho_0}{3}$ представляет собой наблюдаемую трёхмерную кривизну пространства в соответствующем двумерном направлении. Это означает, что трёхмерное пространство невращающейся жидкой сферы имеет *постоянную отрицательную кривизну*.

Вычисляя наблюдаемую скалярную кривизну $C = h^{ik}C_{ik}$, где ненулевые компоненты C_{ik} равны

$$C_{11} = -\frac{2\kappa\rho_0}{3} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.104)$$

$$C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2\theta} = -\frac{2\kappa\rho_0 r^2}{3}, \quad (2.105)$$

мы получаем

$$C = -2\kappa\rho_0 = const < 0. \quad (2.106)$$

Следовательно, согласно (2.103), х.и.-тензор кривизны C_{iklj} выражается через наблюдаемую скалярную кривизну C как

$$C_{iklj} = \frac{C}{6} (h_{kl}h_{ij} - h_{il}h_{kj}). \quad (2.107)$$

Итак, наблюдаемое трёхмерное пространство невращающейся жидкой сферы является *пространством постоянной отрицательной кривизны*. Радиус его кривизны \mathfrak{K} является мнимым: \mathfrak{K} выражается через наблюдаемую скалярную кривизну C как

$$C = -2\kappa\rho_0 = \frac{1}{\mathfrak{K}^2}, \quad (2.108)$$

и, таким образом, мы получаем

$$\mathfrak{K} = \frac{i}{2\kappa\rho_0}. \quad (2.109)$$

Теперь вычислим компоненты тензора Римана-Кристоффеля

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} \right) + g^{\sigma\tau} (\Gamma_{\alpha\delta,\sigma} \Gamma_{\beta\gamma,\tau} - \Gamma_{\beta\delta,\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma,\tau}). \quad (2.110)$$

Согласно метрике жидкой сферы (2.78) мы имеем $g_{ik} = -h_{ik}$ и $\Gamma_{ik,j} = -\Delta_{ik,j}$. Вычисляя ненулевые компоненты $\Gamma_{\alpha\beta,\delta}$

$$\Gamma_{01,0} = -\Gamma_{00,1} = \frac{\kappa\rho_0 r}{12} \frac{3\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.111)$$

$$\Gamma_{11,1} = -\frac{\kappa\rho_0 r}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right)^2}, \quad (2.112)$$

и подставляя их в (2.110), получаем

$$R_{0101} = -\frac{\kappa\rho_0}{12} \frac{3\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.113)$$

$$R_{1212} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = -C_{1212}, \quad (2.114)$$

$$R_{1313} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = -C_{1313}, \quad (2.115)$$

$$R_{2323} = \frac{\kappa\rho_0}{3} r^4 \sin^2 \theta = -C_{2323}. \quad (2.116)$$

Мы видим, что компонента R_{0101} , определяющая четырёхмерную кривизну в $(r-t)$ -направлении 0101, не удовлетворяет условию четырёхмерных пространств постоянной кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = Q(g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}), \quad Q = const. \quad (2.117)$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Четырёхмерное пространство (пространство-время) невращающейся жидкой сферы *не является* пространством постоянной кривизны. Напротив, её наблюдаемое трёхмерное пространство, как было доказано выше, является *пространством постоянной отрицательной кривизны*.

Мы также видим из полученных формул для C_{1212} (2.100) и C_{1313} (2.101), что трёхмерная наблюдаемая кривизна C_{iklj} обладает пространственным разрывом

$$C_{1212} \rightarrow -\infty, \quad C_{1313} \rightarrow -\infty \quad (2.118)$$

при условии $r = r_{br} = \sqrt{3/\kappa\rho_0} = \sqrt{a^3/r_g}$. При этом же условии $r = r_{br}$ по формуле для R_{0101} (2.113) мы имеем

$$R_{0101} \rightarrow -\infty. \quad (2.119)$$

Другими словами, трёхмерная х.и.-кривизна C_{iklj} и четырёхмерная риманова кривизна $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеют пространственный разрыв при $r = r_{br}$. Применительно к модели жидких звёзд это означает:

В поле любой звезды наблюдаемая трёхмерная кривизна пространства C_{iklj} и четырёхмерная риманова кривизна $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеют общий пространственный разрыв на сферической поверхности на расстоянии $r = r_{br} = \sqrt{3/\kappa\rho_0} = \sqrt{a^3/r_g}$ от звезды.

В этом заключается геометрический смысл внешнего пространственного разрыва в поле звезды (в рамках рассматриваемой жидкостной модели).

2.4 Сила гравитации, действующая внутри жидкой звезды

Гравитационно-инерциальная сила F_i (1.42) в невращающемся пространстве обусловлена только компонентой g_{00} (которая определяется гравитационным потенциалом w). Вычислим эту силу. Так

как гравитационный потенциал равен $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$, мы имеем

$$F_i = \frac{\partial w}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (2.120)$$

Во “внутренней” метрике невращающейся жидкой сферы (2.76)

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2, \quad (2.121)$$

или, в той же метрике, но записанной в другой форме (2.78),

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2. \quad (2.122)$$

Отсюда получаем, что гравитационно-инерциальная сила, действующая внутри невращающейся жидкой сферы, равна

$$F_1 = -\frac{\kappa \rho_0 c^2 r}{3} \frac{1}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right) \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.123)$$

$$F^1 = -\frac{\kappa \rho_0 c^2 r}{3} \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.124)$$

или, в другой форме,

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{1}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (2.125)$$

$$F^1 = -\frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (2.126)$$

Это — сила притяжения: так как $r < a$ внутри сферы, то $F_1 < 0$ в ней. Эта сила пропорциональна расстоянию r . Её численное значение равно нулю в центре сферы, затем увеличивается с расстоянием

до максимального значения на поверхности звезды (где $r = a$)

$$(F_1)_{r=a} = -\frac{\kappa\rho_0 c^2 a}{6} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} = -\frac{c^2 r_g}{2a^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{a}}, \quad (2.127)$$

$$(F^1)_{r=a} = -\frac{\kappa\rho_0 c^2 a}{6} = -\frac{c^2 r_g}{2a^2}. \quad (2.128)$$

2.5 Решение уравнений закона сохранения: давление и плотность внутри звёзд

Рассмотрим теперь давление p и плотность ρ_0 внутри обычной жидкой звезды. Формула, связывающая давление и плотность в среде, называется уравнением состояния. Оно следует как решение уравнений закона сохранения.

После подстановки физически наблюдаемых компонент тензора энергии-импульса идеальной жидкости (2.21) в общие уравнения закона сохранения (1.96–1.97) они принимают вид (2.26–2.27). В недеформирующемся пространстве, таком как пространство обычной звезды, ненулевым остаётся только векторное уравнение сохранения (2.36). Оно решается по формуле (2.40)

$$p = B e^{-\frac{r}{2}} - \rho_0 c^2. \quad (2.129)$$

Подставив уже найденные постоянную интегрирования B (2.70) и функцию $e^{\frac{r}{2}}$ (2.75) в p (2.129), мы получаем формулу, связывающую давление p и плотность ρ_0 внутри обычной звезды

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}}{3\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}. \quad (2.130)$$

Найдём давление в приповерхностном слое звезды. Константа $\kappa = 18,6 \times 10^{-28}$ см/грамм является очень малой величиной, тогда как $\rho_0 = 1,4$ грамм/см³ для Солнца (жёлтого карлика) намного меньше, чем для более крупных звёзд. Поэтому $\kappa\rho_0 a^2$ намного меньше 1 даже для очень больших звёзд. Например, для Бетельгейзе, одного из крупнейших красных сверхгигантов: $M = 4,0 \times 10^{34}$ грамм, $a = 7,0 \times 10^{13}$ см и $\rho_0 = 2,8 \times 10^{-8}$ грамм/см³. В этом случае мы

имеем $\kappa\rho_0 a^2 = 2,6 \times 10^{-7}$. В результате имеем

$$\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \approx 1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{6}, \quad \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} \approx 1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{6}. \quad (2.131)$$

Таким образом, после некоторых вычислений мы получаем приближенную формулу для давления p внутри обычной звезды

$$p \approx \frac{\kappa\rho_0^2 c^2 (a^2 - r^2)}{12} = \frac{\rho_0 GM}{2a^2} \left(\frac{a^2 - r^2}{a} \right). \quad (2.132)$$

Пусть расстояние h от поверхности сферы до точки измерения $h = a - r$. Поскольку $h \ll r$ в приповерхностном слое, имеем

$$a^2 - r^2 = (a - r)(a + r) = h(2a + h) \approx 2ah. \quad (2.133)$$

Таким образом, из (2.132) мы получаем обычную формулу для давления в приповерхностном слое звезды

$$p = \rho_0 gh, \quad (2.134)$$

где $\frac{GM}{a^2} = g$ ускорение свободного падения вблизи поверхности.

Давление в центральной области обычной звезды легко найти, приняв $r = 0$ в общей формуле (2.130). Обозначая центральное давление как $p_0 = p_{r=0}$, получаем

$$p_0 = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - 1} \approx \frac{\kappa\rho_0^2 a^2 c^2}{12}. \quad (2.135)$$

Так как $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, мы можем переписать эту формулу в виде

$$p_0 \approx \frac{3GM^2}{8\pi a^4}. \quad (2.136)$$

В таблице 2.2 приведены значения центрального давления p_0 , рассчитанные по этой формуле для типичных обычных звёзд.

Мы видим, что, согласно нашей модели жидких звёзд, давление в центральной области Бетельгейзе, одной из крупнейших звёзд, составляет всего 0,53 атмосферного ($1 \text{ атм} = 10^6 \text{ дин/см}^2$). Чем меньше размер звезды, тем выше становится давление внутри неё.

Объект	Масса M , грамм	Радиус a , см	Плотность ρ_0 , грамм/см ³	Давление p_0 , дин/см ²
Красный сверхгигант*	$4,0 \times 10^{34}$	$7,0 \times 10^{13}$	$2,8 \times 10^{-8}$	$5,3 \times 10^5$
Белый сверхгигант [†]	$3,4 \times 10^{34}$	$4,8 \times 10^{12}$	$7,3 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{10}$
Солнце	$2,0 \times 10^{33}$	$7,0 \times 10^{10}$	1,4	$1,3 \times 10^{15}$
Юпитер (протозвезда)	$1,9 \times 10^{30}$	$7,1 \times 10^9$	1,3	$1,2 \times 10^{15}$
Красные карлики	$6,7 \times 10^{32}$	$2,3 \times 10^{10}$	13	$1,3 \times 10^{16}$
Коричневый карлик [‡]	$4,1 \times 10^{31}$	$7,0 \times 10^9$	29	$5,7 \times 10^{15}$
Белый карлик [§]	$2,0 \times 10^{33}$	$6,4 \times 10^8$	$1,8 \times 10^6$	$1,9 \times 10^{23}$

*Бетельгейзе. [†]Ригель. [‡]Corot-Exo-3. [§]Сириус В.

Таблица 2.2: Основные характеристики обычных звёзд.

Центральное давление Ригеля, белого сверхгиганта, радиус которого в 14,6 раза меньше радиуса Бетельгейзе, составляет $1,7 \times 10^4$ атм. У карликов, таких как Солнце, центральное давление $\sim 10^9$ атм. У белых карликов центральное давление достигает 10^{17} атм.

Отметим, что температура конденсированной материи не зависит от давления. Несжимаемая жидкость звёзд представляет собой своего рода конденсированную материю. Поэтому температуры внутри звёзд зависят исключительно от формулы того конкретного механизма, который производит звёздную энергию.

Это замечание важно для понимания физических условий внутри звёзд и источников звёздной энергии.

2.6 Механизм генерации звёздной энергии согласно жидкостной модели звёзд и диаграмме масса-светимость

Перейдём к безразмерным характеристикам звёзд, которые выражаются в долях соответствующих характеристик Солнца

$$\bar{M} = \frac{M}{M_{\odot}}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a_{\odot}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\odot}}, \quad \dots \text{ и т.д.,} \quad (2.137)$$

где $\bar{M} = \bar{\rho}_0 \bar{a}^3$ для жидкой сферы*. Для светимости L звезды, т.е. энергии, излучаемой со всей её поверхности в космос за одну секунду, мы имеем

$$\bar{L} = \frac{L}{L_{\odot}}. \quad (2.138)$$

При таком представлении характеристик звёзд анализ значительно упрощается. Это связано с тем, что в формулах остаются только существенные множители, а все постоянные коэффициенты вымываются.

Теперь изучим, какой механизм производства звёздной энергии можно предложить в соответствии с общей теорией относительности, чтобы его производительность удовлетворяла наблюдаемой светимости звёзд. Другими словами, чтобы быть реальным механизмом, который генерирует энергию в звёздах, расчётное производство энергии предлагаемым механизмом должно соответствовать соотношению масса-светимость, которое является основным эмпирическим соотношением наблюдательной астрофизики.

Рассмотрим таким образом метрику пространства жидкой звезды. Как мы уже знаем, пространство жидкой звезды имеет две главные области, описываемые разными метриками:

1. Внутренняя метрика пространства звезды (метрика жидкой сферы) справедлива от центра звезды до её поверхности, за исключением сингулярной сферической поверхности крошечного радиуса $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ вокруг центра звезды (см. ниже). Внутренняя метрика также справедлива на сингулярной поверхности радиусом $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ вокруг звезды в далёком космосе: на этой сферической поверхности в далёком космосе гравитационное поле звезды имеет пространственный разрыв, созданный её внутренней метрикой;
2. Внешняя метрика звезды (метрика точечной массы) справедлива от поверхности звезды до бесконечности, за исключением сингулярной сферической поверхности, которая окружает звезду на расстоянии $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ далеко от её поверхности в космосе (см. выше). Внешняя метрика также

* Жидкая звезда имеет одинаковую плотность $\rho = \rho_0 = const$ по всему её объёму, так что её масса равна $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$. В долях массы Солнца это выражается в виде $\bar{M} = \bar{\rho}_0 \bar{a}^3$.

справедлива глубоко внутри звезды на сингулярной сферической поверхности крошечного радиуса $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ от центра звезды: на этой сферической поверхности в глубине звезды гравитационное поле звезды имеет пространственный разрыв, созданный её внешней метрикой.

Как было показано в §2.3, внешний пространственный разрыв в далёком космосе означает лишь разрыв кривизны пространства. На основании §2.3 можно показать, что это не приводит к аномалии по отношению к действующей силе гравитации.

Однако сейчас мы покажем, что сила гравитации имеет очень сильную аномалию на сингулярной сферической поверхности разрыва внутреннего пространства. Действительно, внутри звезды на гильбертовом радиусе r_g от её центра справедлива метрика внешнего пространства (а внутренняя метрика справедлива как внутри гильбертова радиуса, так и вне его). Поэтому все вычисления для внутренней сингулярной поверхности выполняются с внешней метрикой (метрикой точечной массы). И это несмотря на то, что данная сингулярная поверхность расположена глубоко внутри звезды вблизи её центра.

Согласно фундаментальному метрическому тензору внешней метрики звезды (1.1), физически наблюдаемый х.и.-вектор вектор силы гравитации F_i имеет вид (1.4). На сингулярной сферической поверхности гильбертова радиуса $r = r_g$ глубоко внутри звезды наблюдаемая сила гравитации (1.4) достигает бесконечно большой величины

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \rightarrow -\infty, \quad (2.139)$$

т.е. гравитационное поле звезды имеет пространственный разрыв на этой поверхности.

Благодаря своей бесконечно большой величине сила гравитации там по определению достаточна для передачи необходимой кинетической энергии лёгким атомным ядрам звёздного вещества, чтобы начался процесс термоядерного синтеза. Энергия, выделяющаяся при термоядерном синтезе, — это та энергия, которую излучают звезды.

Сингулярная сферическая поверхность радиусом, равным гильбертову радиусу $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, окружает геометрический центр каждой

звезды. Это означает, что в центре каждой звезды находится светящееся “внутреннее солнце”. Это “внутреннее солнце” — крошечное по сравнению с размером звезды. Например, гильбертов радиус Солнца составляет всего 2,9 км, а физический радиус Солнца равен 700 000 км. Таким образом, зона термоядерного синтеза — это не только поверхностный слой радиусом r_g , но и весь объём “внутреннего солнца”. Иными словами, “внутреннее солнце” радиуса r_g — это то место, где термоядерный синтез из водорода образует гелий, обеспечивая энергией светимость звезды. Далее энергия передается от “внутреннего солнца” звезды к её поверхности за счёт теплопроводности (обычный перенос тепла в жидкостях), а затем излучается с её поверхности в космос.

Поскольку “внутреннее солнце” звезды имеет радиус, равный гильбертовому радиусу звезды r_g , в дальнейшем мы будем называть его *светящимся гильбертовым ядром*, или просто — *гильбертовым ядром*.

Светимость звезды, светящей благодаря предложенному механизму звёздной энергии, зависит только от двух факторов: объёма гильбертова ядра $V = \frac{4}{3}\pi r_g^3$, в котором выделяется энергия, и плотности ρ_g звёздного вещества внутри него (которая может отличаться от плотности ρ_0 основной массы звезды, см. объяснение ниже). В безразмерных характеристиках звёзд это

$$\bar{L} = \bar{\rho}_g \bar{r}_g^3 = \bar{\rho}_g \bar{M}^3. \quad (2.140)$$

Напомним, что предлагаемый механизм звёздной энергии не зависит от давления в центральной области звезды: действующая там сверхсильная гравитация (2.139) обеспечивает необходимые условия для термоядерного синтеза. Но производительность механизма зависит от плотности звёздного вещества в гильбертовом ядре.

Рассчитаем плотность гильбертова ядра так, чтобы предполагаемый механизм звёздной энергии удовлетворял наблюдаемому соотношению массы и светимости.

Будем исходить из фактов наблюдательной астрономии. Она показывает соотношение массы и светимости $\bar{L} = \bar{M}^{2,6}$ для звёзд с массами от $0,2M_\odot$ до $0,5M_\odot$, соотношение $\bar{L} = \bar{M}^{4,5}$ для звёзд с массами от $0,5M_\odot$ до $2M_\odot$, $\bar{L} = \bar{M}^{3,6}$ в диапазоне от $2M_\odot$ до $10M_\odot$, и $\bar{L} = \bar{M}$ для звёзд намного массивнее $10M_\odot$. См. таблицу 2.3.

Эти эмпирические данные наблюдательной астрономии согласуются с нашей теоретической формулой для светимости звёзд L (2.140), если звёздное вещество гильбертова ядра (в котором вырабатывается звёздная энергия) имеет плотность, как показано в таблице 2.4.

На основании функции $\bar{\rho}_g = \bar{M}^y$ по таблице 2.4 мы можем узнать, насколько плотно гильбертово ядро звезды по сравнению с её основной массой (известной из астрономических наблюдений). Таким образом, мы вычисляем следующее соотношение для звёзд

$$\frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_0} = \frac{\bar{M}^y}{\bar{\rho}_0}. \quad (2.141)$$

Результаты расчётов приведены в таблице 2.5. На основании рассчитанного отношения $\bar{\rho}_g/\bar{\rho}_0$, показанного в таблице 2.5, мы приходим к следующему выводу. Светящееся гильбертово ядро звезды — её “внутреннее солнце” — может иметь плотность, отличную от плотности основной массы звезды. Это зависит от конкретного типа звёзд. Например, звёздное вещество гильбертова ядра гиганта или сверхгиганта на много порядков плотнее основного вещества этих звёзд. Гильбертово ядро звезды, похожей на Солнце, имеет примерно такую же плотность, как и сама звезда. Что касается карликовых звёзд, то гильбертово ядро такой звезды более разрежено, чем основное вещество звезды. Чем больше плотность карликовой звезды, тем меньше плотность её ядра по сравнению с плотностью всей звезды. У такой звезды, как белый карлик, гильбертово ядро на много порядков более разрежено, чем основное вещество звезды.

Соответственно возникает следующий вопрос. Все физические тела имеют массы, поэтому каждое тело должно иметь внутри себя ядро гильбертова радиуса. Такое ядро должны иметь не только звёзды, но и планеты и даже отдельные элементарные частицы. Но почему они не светят, как звёзды?

Ответ исходит из состояния того вещества, из которого состоят эти физические тела. Звёзды состоят из жидкого вещества, состоящего в основном из лёгких химических элементов, таких как водород и гелий. Поэтому в гильбертовом ядре каждой звезды возможен термоядерный синтез лёгких атомных ядер. Благодаря тому, что вещество является жидким, к его светящемуся гильбертовому

Наблюдаемая зависимость масса-светимость $\bar{L} = \bar{M}^x$	Шкала звёздных масс в долях массы Солнца M_{\odot}
$\bar{L} = \bar{M}^{2,6}$	$\bar{M} = 0,2 \dots 0,5$
$\bar{L} = \bar{M}^{4,5}$	$\bar{M} = 0,5 \dots 2$
$\bar{L} = \bar{M}^{3,6}$	$\bar{M} = 2 \dots 10$
$\bar{L} = \bar{M}$	$\bar{M} > 10$

Таблица 2.3: Наблюдаемая зависимость
масса-светимость $\bar{L} = \bar{M}^x$.

Плотность гильбертова ядра $\bar{\rho}_g$	Шкала звёздных масс в долях массы Солнца M_{\odot}
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{0,4}$	$\bar{M} = 0,2 \dots 0,5$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{1,5}$	$\bar{M} = 0,5 \dots 2$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{0,6}$	$\bar{M} = 2 \dots 10$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{-2}$	$\bar{M} > 10$

Таблица 2.4: Плотность вещества внутри гильбертова ядра.

Объект	Масса \bar{M}	Плотность $\bar{\rho}_0$	$\bar{\rho}_g/\bar{\rho}_0$
Бетельгейзе (красный сверхгигант)	20	$2,0 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^9$
Ригель (белый сверхгигант)	17	$5,2 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^7$
Юпитер (протозвезда)	$9,5 \times 10^{-4}$	0,9	0,069
Красные карлики	0,34	9	0,072
Коричневый карлик (Corot-Echo-3)	0,021	21	0,010
Белый карлик (Сириус B)	1	$1,3 \times 10^6$	$7,7 \times 10^{-7}$

Таблица 2.5: Отношение $\bar{\rho}_g/\bar{\rho}_0$ для некоторых типичных звёзд.

ядру из других областей звезды доставляется всё больше и больше “ядерного топлива”, поддерживая тем самым горение внутри “ядерного котла” вплоть до момента, когда закончится всё ядерное топливо звезды. Другое дело — планеты. Они состоят в основном из тяжёлых элементов с незначительным содержанием водорода. Поэтому, как только “ядерный котёл” гильбертова ядра израсходует весь запас водородного топлива в центральной области планеты, он перестает вырабатывать энергию, но продолжает существовать в центре планеты, в латентном состоянии.

Астрономам известно, что энергия, излучаемая Юпитером, превышает солнечную энергию, поглощаемую всей поверхностью этой планеты. То же самое верно и для Сатурна. Это означает, согласно нашей теории, что гильбертово ядро каждой из этих планет всё ещё перерабатывает водород в гелий, тем самым высвобождая ядерную энергию.

Относительно отдельных элементарных частиц, таких как протоны, нейтроны и электроны: как известно, они стабильны и индифферентны в течение длительного времени, пока не взаимодействуют с другими частицами. Фактически это означает, что гильбертово ядро протона (а также нейтрона и электрона) не взаимодействует с основной массой частицы. Почему это происходит? Можно только догадываться, что либо вещество, находящееся внутри частиц, находится в сверхтвёрдом состоянии, либо между ядром и остальной массой существует слой очень сильного вакуума. С другой стороны, гильбертово ядро протона (и нейтрона) имеет крошечный радиус $(r_g)_p = \frac{2Gm_p}{c^2} = 2,48 \times 10^{-52}$ см, а гильбертово ядро электрона имеет ещё меньший радиус $(r_g)_e = \frac{2Gm_e}{c^2} = 1,35 \times 10^{-55}$ см. Как было сказано Альбертом Эйнштейном, геометрические законы (геометрия пространства-времени) общей теории относительности верны, вероятно, вплоть до масштабов элементарных частиц. В субъядерном масштабе, возможно, работает другая геометрия, утверждающая свои законы, отличные от законов общей теории относительности. Поэтому мы не можем сейчас сказать что-то определённое о физических условиях и процессах внутри элементарных частиц.

Но что касается обычного мира звёзд и планет, то экспериментальная физика и наблюдательная астрономия показывают, что теория Эйнштейна верна и работает в этих масштабах с высокой

точностью. Поэтому следует принимать во внимание все наши выводы о внутреннем строении звёзд и о механизме генерации энергии в звёздах.

Конкретные детали предполагаемого механизма звёздной энергии — это особая тема, выходящая за рамки этой книги (которая в основном посвящена внутреннему строению звёзд).

2.7 Заключение

Все теоретические выводы об источнике звёздной энергии и о внутреннем строении звёзд, представленные в этой главе, получены в рамках нашей модели жидких звёзд. Наша модель основана на представлении о звёздах как пространственно-временных объектах согласно общей теории относительности. Ниже мы перечисляем наиболее важные выводы, к которым мы таким образом пришли:

1. Поле каждой звезды имеет внешний пространственный разрыв, который окружает звезду сферической поверхностью. “Пузырь” внешнего пространственного разрыва в поле каждой звезды имеет радиус

$$r_{br} = \sqrt{\frac{3}{\kappa\rho_0}} = \sqrt{\frac{a^3}{r_g}}, \quad (2.142)$$

на много порядков больший физического радиуса звезды a . Наблюдаемая трёхмерная кривизна пространства C_{iklj} и четырёхмерная риманова кривизна $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеют на этой поверхности общий пространственный разрыв. Внешний пространственный разрыв препятствует формированию близлежащего вещества на этой орбите в планету. Внешний пространственный разрыв в поле Солнца расположен в пределах пояса астероидов, вблизи максимальной концентрации астероидов;

2. Поле каждой звезды имеет разрыв во внутреннем пространстве, внутри физического тела звезды, на поверхности гильбертова радиуса

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.143)$$

от её центра. Это означает, что там имеется маленькое ядро, отделённое сингулярной поверхностью от основной массы звезды. На поверхности этого ядра сила гравитации достигает

бесконечно большой величины. Сверхсильной гравитации по определению достаточно для передачи необходимой кинетической энергии лёгким атомным ядрам звёздного вещества, чтобы начался термоядерный синтез. Таким образом высвобождается ядерная энергия. Жидкое “ядерное топливо” доставляется из других областей звезды в ядро, поддерживая тем самым горение внутри этого “ядерного котла”;

3. Каждая звезда имеет массу. Следовательно, светящееся ядро гильбертова радиуса $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ — “внутреннее солнце” — существует в центре каждой звезды. Мы называем его *гильбертовым ядром*. Это — место, где термоядерный синтез производит гелий из водорода, таким образом обеспечивая светимость звёзд. Затем энергия передаётся от “внутреннего солнца” звезды к её поверхности за счёт теплопроводности (обычный перенос тепла в жидкостях), чтобы затем излучаться в космос;
 4. Гильбертово ядро — крошечное по сравнению с размером звезды. Например, для Солнца $r_g = 2,9$ км;
 5. Наблюдаемое соотношение масса-светимость звёзд выполняется, если плотность гильбертова ядра зависит от конкретного типа звезды. Гильбертово ядро гиганта или сверхгиганта должно быть на много порядков плотнее основного вещества этих звёзд. Гильбертово ядро звезды, подобной Солнцу, должно быть примерно такой же по плотности, как и сама звезда. В звезде-карлике гильбертово ядро должно быть более разреженным, чем основное вещество звезды (ядро белого карлика должно быть крайне разрежено);
 6. Каждая планета имеет массу. Следовательно, гильбертово ядро находится в центре каждой планеты. Но планеты состоят в основном из тяжёлых элементов с небольшим содержанием водорода. Как только “ядерный котёл” гильбертова ядра планеты израсходует весь запас водородного топлива в центральной области планеты, он перестаёт вырабатывать энергию, но продолжает существовать в центре планеты, в латентном состоянии.
-

3.1 Постановка задачи. Метрика внутреннего пространства обычной невращающейся звезды

Чтобы понять в общих чертах описание обычной звезды, вспомним, что в §2.1 мы повторили вывод истинной метрики пространства жидкой сферы, сделанный Л. Борисовой [11, 12], следуя “историческому пути”, как это сделал Шварцшильд. А именно — мы взяли сферически-симметричную метрику в общем виде, затем применили частные условия характеризующие сферу, заполненную идеальной жидкостью. Единственным отличием от вывода Шварцшильда было то, что мы не вводили никаких искусственных ограничений. Следуя этим путём, мы получили наблюдаемые характеристики пространства в неявном виде, как вспомогательный результат. Затем, используя эти результаты, мы вывели метрику пространства жидкой сферы в окончательном виде.

Теперь мы выразим наблюдаемые характеристики пространства жидкой сферы в явном виде, т.е. через компоненты фундаментального метрического тензора метрики жидкой сферы, полученные нами в главе 2. Итак, истинная метрика пространства жидкой сферы, выведенная Л. Борисовой [11, 12], имеет вид (1.8)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

Мы вычисляем х.и.-характеристики пространства согласно их определениям, данным в §1.3, и соответствующим компонентам фундаментального метрического тензора метрики (3.1).

Х.и.-метрический тензор h_{ik} метрики (3.1) имеет следующие ненулевые компоненты

$$h_{11} = \frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad h_{22} = r^2, \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.2)$$

$$h^{11} = 1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}, \quad h^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad h^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.3)$$

а его детерминант и пространственные производные от логарифма его детерминанта, не равные нулю, имеют вид

$$h = \det \|h_{ik}\| = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad (3.4)$$

$$\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} = \frac{2}{r} + \frac{r_g r}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} = \cot \theta. \quad (3.5)$$

Итак, после вычислений согласно хронометрически инвариантному формализму (см. §1.3) получаем следующее. Компоненты х.и.-вектора гравитационно-инерциальной силы, действующей в пространстве, имеет вид

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{a^3} \frac{r}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (3.6)$$

$$F^1 = -\frac{c^2 r_g}{a^3} \frac{r \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (3.7)$$

где $r < a$, так как всё это — внутри сферы. Следовательно, там $F_1 < 0$, т.е. это — сила притяжения.

Ненулевые х.и.-символы Кристоффеля имеют вид

$$\Delta_{11}^1 = \frac{r_g r}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad \Delta_{22}^1 = -\frac{\Delta_{33}^1}{\sin^2 \theta} = -r \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right), \quad (3.8)$$

$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta. \quad (3.9)$$

Ненулевые компоненты х.и.-тензора трёхмерной наблюдаемой кривизны C_{ijkl} и его свёртки C_{ik} имеют вид

$$C_{1212} = \frac{C_{1313}}{\sin^2\theta} = -\frac{r_g r^2}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad C_{2323} = -\frac{r_g r^4}{a^3} \sin^2\theta, \quad (3.10)$$

$$C_{11} = -\frac{2r_g}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2\theta} = -\frac{2r_g r^2}{a^3}. \quad (3.11)$$

Имея полученные физически наблюдаемые х.и.-характеристики внутреннего пространства жидкой сферы, теперь у нас есть всё, что нужно для рассмотрения уравнений Эйнштейна во внутреннем поле обычной невращающейся звезды.

3.2 Уравнения Эйнштейна во внутреннем поле обычной невращающейся звезды

Рассмотрим уравнения поля Эйнштейна во внутреннем пространстве жидкой сферы, метрика которого имеет вид (3.1). Как известно, тензор энергии-импульса идеальной жидкости имеет следующий общий вид (2.4)

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

где $\rho_0 = const$ плотность жидкости, p давление, тогда как U^α четырёхмерная скорость течения жидкости относительно наблюдателя (это — единичный четырёхмерный вектор, поэтому $U_\alpha U^\alpha = 1$). Х.и.-проекции тензора энергии-импульса имеют вид (2.21)

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho_0, \quad J^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik} = p h^{ik}, \quad (3.13)$$

где ρ наблюдаемая плотность массы жидкости, J^i наблюдаемая плотность импульса жидкости, тогда как U^{ik} наблюдаемый тензор напряжений в жидкости.

С помощью этих формул и с учётом того, что пространство рассматриваемой жидкой сферы не вращается и не деформируется ($A_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$), х.и.-уравнения Эйнштейна (1.92–1.94) принимают

следующий вид

$${}^* \nabla_j F^j - \frac{1}{c^2} F_j F^j = -\frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 + U), \quad (3.14)$$

$$J^i = 0, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ({}^* \nabla_i F_k + {}^* \nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ = \frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где ${}^* \nabla_i$ символ х.и.-дифференцирования, $U_{ik} = p h_{ik}$ и $U = 3p$.

Подставим в уравнения поля Эйнштейна формулы для F_i , C_{ik} и h_{ik} , вычисленные для метрики (3.1). Получаем, что ненулевыми остаются только два уравнения

$$\frac{3c^2 r_g}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = \frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 + 3p), \quad (3.17)$$

$$\frac{3c^2 r_g}{a^3} \frac{2\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = \frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 - p). \quad (3.18)$$

Умножая (3.18) на 3, затем суммируя произведение с (3.17), мы получаем

$$\kappa \rho_0 c^2 = \frac{3c^2 r_g}{a^3}. \quad (3.19)$$

Подставляя этот результат обратно в (3.18), получаем *уравнение состояния*^{*} для жидкого вещества обычных звёзд

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}}}{3\sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}. \quad (3.20)$$

Эта формула полностью совпадает с формулой для давления p (2.130), полученной нами в главе 2 в результате следования путём Шварцшильда.

^{*} Формула, связывающая давление и плотность внутри среды.

Эта формула для давления p также может быть получена из уравнений сохранения (2.26–2.27). Поскольку пространство метрики (3.1) не деформируется (что означает $h_{ik} \neq f(t)$ и, следовательно, $D_{ik} = 0$), х.и.-скалярное уравнение сохранения (2.26) обращается в нуль. Остаётся только х.и.-векторное уравнение сохранения (2.27). Оно принимает форму

$${}^* \nabla_i (p h^{ik}) - \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (3.21)$$

При этом ${}^* \nabla_i h^{ik} = 0$ всегда справедливо для h^{ik} , как и $\nabla_\sigma g^{\alpha\sigma} = 0$ для фундаментального метрического тензора. Поэтому, а также в силу того, что х.и.-производная по пространственным координатам совпадает с обычной пространственной производной в случае, когда пространство не вращается, остальные уравнения сохранения (3.21) имеют вид

$$h^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (3.22)$$

Подставляя формулы для h^{11} и F^1 , полученные нами для метрики (3.1), преобразуем (3.22) в дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{\rho_0 c^2 + p} = - \frac{r_g}{a^3} \frac{r dr}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (3.23)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$d \ln(\rho_0 c^2 + p) = - d \ln \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right), \quad (3.24)$$

который легко интегрировать. После интегрирования имеем

$$p + \rho_0 c^2 = \frac{Q}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (3.25)$$

где постоянная интегрирования Q получается из очевидного условия $p = 0$ на поверхности звезды (где $r = a$). Тогда

$$Q = 2 \rho_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} \quad (3.26)$$

и, таким образом, мы получаем

$$p + \rho_0 c^2 = 2\rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (3.27)$$

Легко видеть, что это решение приводит к той же формуле для p , что и (3.20), которую мы получили из уравнений Эйнштейна.

3.3 Метрика внутреннего пространства обычной вращающейся звезды

Рассмотрим метрику обычной жидкой звезды (3.1) с той лишь заменой, что звезда вращается с угловой скоростью ω вдоль своей экваториальной оси — оси ϕ в сферических координатах r, θ, ϕ . В этом случае невращающаяся метрика (3.1) принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 + \frac{2\omega r^2 \cos \theta}{c} c dt d\phi - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.28)$$

Мы рассматриваем обычные звёзды — те звёзды, гильбертов радиус которых много меньше их физического радиуса.

Согласно метрике пространства обычной медленно вращающейся звезды (3.28), линейная скорость вращения её пространства равна

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = -\frac{2\omega r^2 \cos \theta}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (3.29)$$

Как известно из данных наблюдательной астрономии, большинство звёзд вращается с линейными скоростями $v < 420$ км/сек. Следовательно, мы имеем $v^2/c^2 < 2 \times 10^{-6}$: большинство звёзд вращаются медленно по сравнению со скоростью света.

Согласно метрике (3.28), мы имеем

$$v^2 = h^{ik} v_i v_k = h^{33} v_3 v_3, \quad h^{33} = -g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.30)$$

Таким образом, отношение v^2/c^2 в пространстве метрики (3.28) выражается следующим образом

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{4\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2 \left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right)^2}. \quad (3.31)$$

Разлагая в этой формуле радикалы в ряды, после элементарных преобразований получаем

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{r_g r^2}{2a^3} \right). \quad (3.32)$$

Далее мы будем пренебрегать членами ряда высших порядков, которые малы, поскольку $r_g \ll a$ для обычных звёзд. Поэтому

$$v_3 = \omega r^2 \cos \theta, \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{v_3^2}{c^2} = \frac{\omega^2 r^4 \cos^2 \theta}{c^2}. \quad (3.33)$$

Ненулевые компоненты х.и.-метрического тензора h_{ik} для метрики (3.28) имеют вид

$$h_{11} = \frac{1}{h^{11}} = \frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad h_{22} = \frac{1}{h^{22}} = r^2, \quad (3.34)$$

$$h_{33} = \frac{1}{h^{33}} = r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \right), \quad (3.35)$$

а детерминант х.и.-метрического тензора h_{ik} и ненулевые пространственные производные от логарифма детерминанта имеют вид

$$h = \det \|h_{ik}\| = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \right), \quad (3.36)$$

$$\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} = \frac{2}{r} + \frac{r_g r}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad (3.37)$$

$$\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} = \cot \theta \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}} \right). \quad (3.38)$$

Так, далее, согласно хронометрически инвариантному формализму (см. §1.3), мы получаем и другие х.и.-характеристики пространства метрики (3.28).

Х.и.-вектор гравитационно-инерциальной силы F_i , действующей в пространстве,

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{a^3} \frac{r}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} < 0, \quad (3.39)$$

$$F^1 = -\frac{c^2 r_g}{a^3} \frac{r \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}}{3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} < 0, \quad (3.40)$$

является неньютоновской силой притяжения внутри жидкой сферы (обычной звезды). В приближении, т.е. пренебрегая членами высших порядков малости, эта сила принимает вид

$$F_1 = F^1 \approx -\frac{c^2 r_g r}{2a^3}. \quad (3.41)$$

Х.и.-тензор угловой скорости пространства A_{ik} имеет следующие ненулевые компоненты

$$A_{13} = \frac{2\omega r \cos \theta}{3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} \times \quad (3.42)$$

$$\times \left[\frac{r_g r^2}{a^3} \frac{1}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} - 1 \right], \quad (3.43)$$

$$A^{13} = \frac{2\omega \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right) \cot \theta}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}\right) r \sin \theta \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}\right)} \times \quad (3.44)$$

$$\times \left[\frac{r_g r^2}{a^3} \frac{1}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} - 1 \right], \quad (3.45)$$

$$A_{23} = \frac{\omega r^2 \sin \theta}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (3.46)$$

$$A^{23} = \frac{\omega}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right) r^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}\right)}. \quad (3.47)$$

Приближённые выражения для этих компонент, т.е. с точностью до членов высшего порядка малости, имеют вид

$$A_{13} = -\omega r \cos \theta \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{r_g r^2}{a^3}\right), \quad (3.48)$$

$$A^{13} = -\frac{\omega \cot \theta}{r \sin \theta} \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{2r_g r^2}{a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}\right), \quad (3.49)$$

$$A_{23} = \frac{\omega r^2 \sin \theta}{2} \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{r_g r^2}{4a^3}\right), \quad (3.50)$$

$$A^{23} = \frac{\omega}{2r^2 \sin \theta} \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{r_g r^2}{4a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}\right). \quad (3.51)$$

Ненулевые х.и.-символы Кристоффеля, вычисляемые для этой метрики, пренебрегая членами более высокого порядка $\omega^4 r^4 / c^4$, имеют следующий вид

$$\Delta_{11}^1 = \frac{r_g r}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad \Delta_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right), \quad (3.52)$$

$$\Delta_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}\right) \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right), \quad (3.53)$$

$$\Delta_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}\right), \quad (3.54)$$

$$\Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right), \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2 \sin^2 \theta}\right). \quad (3.55)$$

Так, далее, мы пренебрегаем слагаемыми r_g^2/a^2 и произведением $\omega^2 r^2/c^2$ на r_g/a как членами высших порядков малости. В резуль-

таге получаем приближённые формулы для этих компонент

$$\Delta_{11}^1 = \frac{r_g r}{a^3}, \quad \Delta_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3} \right), \quad (3.56)$$

$$\Delta_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} - \frac{r_g r^2}{a^3} \right), \quad (3.57)$$

$$\Delta_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \right), \quad (3.58)$$

$$\Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right), \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (3.59)$$

для ненулевых компонент х.и.-тензора кривизны C_{iklj}

$$C_{1212} = -\frac{r_g r^2}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad (3.60)$$

$$C_{1313} = r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{3\omega^2 \cot^2 \theta}{c^2} - \frac{r_g}{a^3} \frac{1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2}}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right), \quad (3.61)$$

$$C_{2323} = \left[-\frac{r_g r^2}{a^3} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \left(\cot^2 \theta + \frac{1}{\sin^4 \theta} \right) \right] r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.62)$$

а также для ненулевых компонент его свёртки C_{ik}

$$C_{11} = -\frac{2r_g}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} + \frac{3\omega^2 \cot^2 \theta}{c^2}, \quad (3.63)$$

$$C_{22} = -\frac{2r_g r^2}{a^3} + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \left(\cot^2 \theta + \frac{1}{\sin^4 \theta} \right), \quad (3.64)$$

$$C_{33} = \left[-\frac{2r_g}{a^3} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \right) + \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{3\omega^2 \cot^2 \theta}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\cot^2 \theta + \frac{1}{\sin^4 \theta} \right) \right] r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.65)$$

Поскольку $r_g/a \ll 1$ и $\omega^2 r^2/c^2 \ll 1$, для обычных звёзд мы пренебрегаем членами r_g^2/a^2 и произведением $\omega^2 r^2/c^2$ на r_g/a в полных выше формулах для х.и.-кривизны. В результате получаем приближённые формулы для х.и.-кривизны

$$C_{1212} = -\frac{r_g r^2}{a^3}, \quad C_{1313} = r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{3\omega^2 \cot^2 \theta}{c^2} - \frac{r_g}{a^3} \right), \quad (3.66)$$

$$C_{2323} = \left[-\frac{r_g r^2}{a^3} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \left(\cot^2 \theta + \frac{1}{\sin^4 \theta} \right) \right] r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.67)$$

$$C_{11} = -\frac{2r_g}{a^3} + \frac{3\omega^2 \cot^2 \theta}{c^2}, \quad (3.68)$$

$$C_{22} = -\frac{2r_g r^2}{a^3} + \frac{\omega^2 r^2 \cot^2 \theta}{c^2} \left(\cot^2 \theta + \frac{1}{\sin^4 \theta} \right), \quad (3.69)$$

$$C_{33} = \left(-\frac{2r_g}{a^3} + \frac{4\omega^2 \cot^2 \theta}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2 \sin^4 \theta} \right) r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.70)$$

3.4 Уравнения Эйнштейна во внутреннем поле обычной вращающейся звезды

Решим теперь уравнения поля Эйнштейна во внутреннем пространстве вращающейся обычной звезды, т.е. в пространстве метрики (3.28). В отсутствие вращения пространства ($A_{ik} = 0$) эта задача сводится к рассмотренной ранее в §3.2 задаче для обычной невращающейся звезды.

Итак, рассмотрим х.и.-уравнения Эйнштейна (1.92–1.94) в пространстве жидкой сферы, которая вращается ($A_{ik} \neq 0$), но не деформируется ($D_{ik} = 0$). В этом случае х.и.-уравнения Эйнштейна принимают форму

$$A_{jl} A^{lj} + {}^* \nabla_j F^j - \frac{1}{c^2} F_j F^j = -\frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 + U), \quad (3.71)$$

$${}^* \nabla_j A^{ij} - \frac{2}{c^2} F_j A^{ij} = -\varkappa J^i, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} 2A_{ij} A_k{}^j + \frac{1}{2} ({}^* \nabla_i F_k + {}^* \nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ = \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}), \end{aligned} \quad (3.73)$$

где ${}^*\nabla_i$ символ х.и.-дифференцирования. Х.и.-величины ρ , J^i и U^{ik} суть физические наблюдаемые проекции тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ жидкости, заполняющей пространство.

С полученными компонентами A_{ik} и F_i (подробнее см. §3.2) х.и.-уравнения Эйнштейна (3.71–3.73) принимают вид

$$\begin{aligned} 2\omega^2 \cot^2\theta \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{3r_g r^2}{a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2\theta}{c^2} \right) + \\ + \frac{\omega^2}{2} \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{r_g r^2}{2a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2\theta}{c^2} \right) + \frac{3c^2 r_g}{2a^3} = \\ = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 + U), \quad (3.74) \end{aligned}$$

$$\frac{\omega \cot\theta}{r^2 \sin\theta} \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{4r_g r^2}{a^3} - \frac{3\omega^2 r^2 \cot^2\theta}{c^2} \right) = -\kappa J^3, \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} 2\omega^2 \cot^2\theta \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{2r_g r^2}{a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2\theta}{c^2} \right) + \frac{3c^2 r_g}{2a^3} = \\ = \frac{\kappa}{2} \left[(\rho c^2 - U) \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3} \right) + 2U_{11} \right], \quad (3.76) \end{aligned}$$

$$\omega^2 r \cot\theta \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{5r_g r^2}{4a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2\theta}{c^2} \right) = -\kappa U_{12}, \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 r^2}{2} \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{r_g r^2}{2a^3} - \frac{\omega^2 r^2 \cot^2\theta}{c^2} \right) + \frac{3c^2 r_g r^2}{2a^3} = \\ = \frac{\kappa}{2} [(\rho c^2 - U) r^2 + 2U_{22}], \quad (3.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[2\omega^2 \cot^2\theta \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{3r_g r^2}{a^3} \right) + \frac{\omega^2}{2} \left(1 + \frac{3r_g}{2a} - \frac{r_g r^2}{2a^3} \right) \right] \times \\ \times r^2 \sin^2\theta + \frac{3c^2 r_g r^2 \sin^2\theta}{a^3} = \\ = \frac{\kappa}{2} [(\rho c^2 - U) r^2 \sin^2\theta + 2U_{33}]. \quad (3.79) \end{aligned}$$

В рамках нашего приближения ($r_g/a \ll 1$ и $\omega^2 r^2/c^2 \ll 1$), характерного для обычных звёзд, мы пренебрегаем слагаемыми r_g^2/a^2 и произведением $\omega^2 r^2/c^2$ на r_g/a в х.и.-уравнения Эйнштейна. В

результате эти уравнения принимают сильно упрощённый вид

$$2\omega^2 \cot^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 + U), \quad (3.80)$$

$$\frac{\omega \cot \theta}{r^2 \sin \theta} = -\kappa J^3, \quad (3.81)$$

$$2\omega^2 \cot^2 \theta - \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 - U) = \kappa U_1^1, \quad (3.82)$$

$$\omega^2 r \cot \theta = -\kappa U_{12}, \quad (3.83)$$

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 - U) = \kappa U_2^2, \quad (3.84)$$

$$2\omega^2 \cot^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 - U) = \kappa U_3^3. \quad (3.85)$$

Суммируя (3.82), (3.84) и (3.85), затем принимая во внимание, что $U_1^1 + U_2^2 + U_3^3 = U$, мы получаем

$$4\omega^2 \cot^2 \theta + \omega^2 = \frac{\kappa}{2} (3\rho c^2 - U). \quad (3.86)$$

Суммируя этот результат (3.86) и (3.80), получаем

$$3\omega^2 \cot^2 \theta + \frac{3\omega^2}{4} = \kappa \rho c^2. \quad (3.87)$$

Умножая (3.80) на 3, затем вычитая результат из (3.86), мы получаем

$$\omega^2 \cot^2 \theta + \frac{\omega^2}{4} = \kappa U, \quad (3.88)$$

и, сравнив (3.87) с (3.88),

$$\rho c^2 = 3U. \quad (3.89)$$

Тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ должен удовлетворять х.и.-уравнениям сохранения (1.96, 1.97). Во вращающемся пространстве звезды, которое не деформируется, они имеют вид

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} + * \nabla_i J^i - \frac{2}{c^2} F_i J^i = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{* \partial J^k}{\partial t} + 2A_i^{*k} J^i + * \nabla_i U^{ik} - \frac{1}{c^2} F_i U^{ik} - \rho F^k = 0. \quad (3.91)$$

Как следует из скалярного уравнения сохранения (3.90),

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \rho = const. \quad (3.92)$$

Х.и.-векторное уравнение сохранения (3.91) с индексом $i = 3$ удовлетворяется тождественно. Уравнения с индексами $i = 1$ и $i = 2$ принимают следующий вид

$$2A_3^1 J^3 + \frac{\partial U^{11}}{\partial r} + \frac{\partial U^{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} U^{12} + \Delta_{22}^1 U^{22} + \\ + \Delta_{33}^1 U^{33} + \left(\Delta_{11}^1 + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} - \frac{1}{c^2} F_1 \right) U^{11} = \rho F^1, \quad (3.93)$$

$$2A_3^2 J^3 + \frac{\partial U^{12}}{\partial r} + \frac{\partial U^{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} U^{22} + \\ + \Delta_{33}^2 U^{33} + \left(2\Delta_{12}^2 + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} - \frac{1}{c^2} F_1 \right) U^{12} = 0. \quad (3.94)$$

Подставляя полученное соотношение $\rho c^2 = 3U$ (3.89) и полученную формулу для U (3.88) в тензорные компоненты х.и.-уравнений Эйнштейна (3.82–3.85), мы получаем

$$\kappa U^{11} = \omega^2 \cot^2 \theta - \frac{\omega^2}{4}, \quad (3.95)$$

$$\kappa U^{12} = -\frac{\omega^2 \cot \theta}{r}, \quad (3.96)$$

$$\kappa U^{22} = \frac{\omega^2}{4r^2} - \frac{\omega^2 \cot^2 \theta}{r^2}, \quad (3.97)$$

$$\kappa U^{33} = \frac{\omega^2 \cot^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\omega^2}{4r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.98)$$

Теперь подставим эти формулы, а также другие необходимые величины в оставшиеся уравнения сохранения (3.93) и (3.94). После некоторых вычислений мы видим, что эти уравнения удовлетворяются тождественно.

Итак, мы получили, что уравнения поля Эйнштейна и уравнения сохранения удовлетворяют метрике внутреннего пространства обычной вращающейся звезды, т.е. метрике пространства (3.28).

3.5 Стационарное безвихревое электромагнитное поле обычной вращающейся звезды

Реальная звезда имеет своё собственное электромагнитное поле. Поэтому мы должны ввести электромагнитное поле в теорию жидких звёзд. Электродинамика в терминах хронометрически инвариантного формализма была представлена в главе 3 нашей книги [18]. Сейчас мы следуем нашим вычислениям оттуда, применяя их к нашей теории жидких звёзд.

Итак, как известно из общековариантной формулировки электродинамики [20], тензор энергии-импульса произвольного электромагнитного поля имеет вид

$$T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2} \left(-F^{\alpha\cdot} F^{\beta\sigma} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma} \right), \quad (3.99)$$

где $F_{\alpha\beta}$ тензор электромагнитного поля, известный также как тензор Максвелла. Тензор поля $F_{\alpha\beta}$ представляет собой ротор четырёхмерного электромагнитного потенциала A^α

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (3.100)$$

Физически наблюдаемыми х.и.-проекциями четырёхмерного электромагнитного потенциала A^α являются скалярный φ и векторный q^i электромагнитные потенциалы

$$\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad q^i = A^i. \quad (3.101)$$

Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ (5.44) имеет следующие физически наблюдаемые проекции

$$\rho_{\text{em}} = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \frac{E_i E^i + H_{*i} H^{*i}}{8\pi c^2}, \quad (3.102)$$

$$J_{\text{em}}^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon^{ikm} E_k H_{*m}, \quad (3.103)$$

$$U_{\text{em}}^{ik} = c^2 T^{ik} = \rho_{\text{em}} c^2 h^{ik} - \frac{1}{4\pi} \left(E^i E^k + H^{*i} H^{*k} \right), \quad (3.104)$$

где E^i трёхмерный х.и.-вектор электрической напряжённости поля, H^{*i} трёхмерный х.и.-псевдовектор магнитной напряжённости поля,

тогда как ε^{imn} полностью антисимметричный единичный трёхмерный х.и.-псевдотензор [18]

$$\left. \begin{aligned} E^{*ik} &= -\varepsilon^{ikn} E_n, & E_n &= \frac{* \partial \varphi}{\partial x^n} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_n}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_n \\ H^{*i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}, & H_{mn} &= \frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \end{aligned} \right\}. \quad (3.105)$$

Как видно из определений (3.105), х.и.-электрическая напряжённость и х.и.-магнитная напряжённость зависят не только от потенциалов электромагнитного поля φ и q^i , но и от характеристик пространства, содержащего это поле. Это — гравитационно-инерциальная сила F_i , действующая в пространстве, и угловая скорость вращения пространства A_{ik} .

Будем полагать, что скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля постоянны и распределены однородно, т.е. рассматриваемое электромагнитное поле является стационарным и безвихревым. Другими словами, мы будем полагать, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{* \partial \varphi}{\partial t} &= 0, & \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{* \partial q_i}{\partial t} &= 0, & q_{ik} &= \frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.106)$$

В этом случае мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E^i &= -\frac{\varphi}{c^2} F^i, & E_i &= -\frac{\varphi}{c^2} F_i \\ H^{*i} &= -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}, & H_{*i} &= -\frac{2\varphi}{c} \Omega_{*i} \end{aligned} \right\}, \quad (3.107)$$

где Ω^{*i} трёхмерный х.и.-псевдовектор угловой скорости вращения пространства, определяемый как

$$\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}, \quad \Omega_{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} A^{mn}. \quad (3.108)$$

Легко найти, что во внутреннем пространстве обычной вращающейся звезды, т.е. в пространстве метрики (3.28), мы имеем

$$\Omega^{*1} = \Omega_{*1} = \frac{\omega}{2}, \quad \Omega^{*2} = \frac{\omega \cot \theta}{r}, \quad \Omega_{*2} = \omega r \cot \theta, \quad (3.109)$$

так что

$$\Omega_{*j} \Omega^{*j} = \omega^2 \left(\frac{1}{4} + \cot^2 \theta \right). \quad (3.110)$$

Как видно из формул (3.107), в стационарном безвихревом электромагнитном поле обычной звезды электрическая напряжённость E^i определяется скалярным электромагнитным потенциалом φ поля и гравитационно-инерциальной силой F^i , действующей в пространстве, а магнитная напряжённость поля H^{*i} обусловлена скалярным электромагнитным потенциалом φ и угловой скоростью Ω^{*i} вращения пространства.

Используя эти формулы для E^i и H^{*i} (3.107), получаем, что физически наблюдаемые компоненты (3.102–3.104) тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\rho_{\text{em}} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right), \quad (3.111)$$

$$J_{\text{em}}^i = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \varepsilon^{ikm} F_k \Omega_{*m}, \quad (3.112)$$

$$U_{\text{em}}^{ik} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) h^{ik} - \frac{\varphi^2}{\pi c^2} \left(\frac{F^i F^k}{4c^2} + \Omega^{*i} \Omega^{*k} \right), \quad (3.113)$$

где след тензора напряжений поля $U_{\text{em}} = h_{ik} U_{\text{em}}^{ik}$ равен

$$U_{\text{em}} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) = \rho_{\text{em}} c^2. \quad (3.114)$$

Как следует из общего вида тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего метрике (3.28), этот тензор должен удовлетворять условию $\rho c^2 = 3U$ (3.89). Эта формула отличается от формулы $\rho_{\text{em}} c^2 = U_{\text{em}}$ (3.114), которую мы только что получили для стационарного безвихревого электромагнитного поля. Следовательно, мы должны найти такую структуру электромагнитного поля, при которой U_{em} удовлетворяет $\rho c^2 = 3U$.

Итак, согласно формуле $\omega^2 \cot^2 \theta + \frac{1}{4} \omega^2 = \kappa U$ (3.88) и условию $\rho c^2 = 3U$ (3.89), полученным из х.и.-уравнений Эйнштейна, плотность поля внутри обычной вращающейся звезды должна быть

$$\rho = \frac{3\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\kappa c^2}, \quad U = \frac{\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\kappa}. \quad (3.115)$$

Поэтому подставим требуемое условие

$$U_{\text{em}} = \frac{\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\varkappa} \quad (3.116)$$

в формулу (3.114), полученную для стационарного безвихревого электромагнитного поля. Мы имеем

$$\frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) = \frac{\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\varkappa}, \quad (3.117)$$

или, раскрывая постоянную гравитации Эйнштейна $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}$,

$$c^2 \Omega_{*j} \Omega^{*j} = \frac{\frac{G\varphi^2}{c^4}}{1 - \frac{4G\varphi^2}{c^4}} F_j F^j. \quad (3.118)$$

Мы рассматриваем стационарное электромагнитное поле. В том случае скалярный и векторный электромагнитные потенциалы остаются неизменными ($\varphi = \text{const}$, $q_i = \text{const}$). Следовательно,

$$\frac{G\varphi^2}{c^4} = n, \quad n < \frac{1}{4} \quad (3.119)$$

в формуле (3.118) — постоянный безразмерный коэффициент, зависящий только от скалярного электромагнитного потенциала φ .

Используя константу n (3.119), мы перепишем (3.118) как

$$c^2 \Omega_{*j} \Omega^{*j} = \frac{n}{1 - 4n} F_i F^i, \quad n < \frac{1}{4}. \quad (3.120)$$

Подставляя $\Omega_{*j} \Omega^{*j}$ (3.110) и $F_i F^i$ (3.41) в условие (3.120), мы представляем его в альтернативном (расширенном) виде

$$\omega^2 (1 + 4 \cot^2 \theta) = \frac{n}{1 - 4n} \frac{c^2 r_g^2 r^2}{4a^6}. \quad (3.121)$$

Если $n = n_{\text{max}} = \frac{1}{4}$ и, следовательно, $\varphi = \varphi_{\text{max}}$, тогда угловая скорость звезды $\omega = \infty$, что бессмысленно. Отсюда мы заключаем, что $n < \frac{1}{4}$ для всех реальных звёзд, включая Солнце. При $n < \frac{1}{4}$ мы получаем верхнюю границу численного значения скалярного электромагнитного потенциала реальной звезды

$$\varphi = \frac{c^2}{2\sqrt{G}} < 1,74 \times 10^{24} \text{ грамм}^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ сек}^{-1}. \quad (3.122)$$

Итого, при условии (3.120) стационарное безвихревое электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Эйнштейна и метрике внутреннего пространства обычной вращающейся звезды. Другими словами, при этом условии (3.120) неподвижная вращающаяся обычная звезда является *постоянным магнитом*.

Поскольку $n = const$ в стационарном электромагнитном поле, приведённое выше условие (3.120) позволяет выразить характеристики электромагнитного поля через геометрические и физические характеристики пространства. Другими словами, в данном конкретном случае мы можем *геометризовать* электромагнитное поле.

Теперь подставим полученные формулы для гравитационно-инерциальной силы и для угловой скорости вращения пространства в физически наблюдаемые компоненты (3.111–3.113) тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$. С учётом соотношений (3.117) и (3.119) получаем наблюдаемые компоненты $F_{\alpha\beta}$ в виде

$$\rho_{em} = \frac{n}{2\pi G} \left[\frac{c^2 r_g^2 r^2}{16a^6} + \omega^2 \left(\frac{1}{4} + \cot^2 \theta \right) \right], \quad (3.123)$$

$$J_{em}^3 = -\frac{nc^2}{4\pi G} \frac{\omega r_g \cot \theta}{a^3 \sin \theta}, \quad (3.124)$$

$$U_{em}^{11} = -\frac{nc^2}{2\pi G} \left[\frac{c^2 r_g^2 r^2}{16a^6} + \omega^2 \left(\frac{1}{4} - \cot^2 \theta \right) \right], \quad (3.125)$$

$$U_{em}^{12} = -\frac{nc^2}{2\pi G} \frac{\omega^2 \cot \theta}{r}, \quad (3.126)$$

$$U_{em}^{22} = \frac{nc^2}{2\pi G r^2} \left[\frac{c^2 r_g^2 r^2}{16a^6} + \omega^2 \left(\frac{1}{4} - \cot^2 \theta \right) \right], \quad (3.127)$$

$$U_{em}^{33} = \frac{nc^2}{2\pi G r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{c^2 r_g^2 r^2}{16a^6} + \omega^2 \left(\frac{1}{4} + \cot^2 \theta \right) \right]. \quad (3.128)$$

Из этих уравнений получаем, как и ранее,

$$U_{em} = h_{ik} U_{em}^{ik} = \rho_{em} c^2. \quad (3.129)$$

Х.и.-уравнения Эйнштейна (3.123–3.128) могут быть дополнительно упрощены. В поверхностном слое звезды ($r \approx a$) первое сла-

гаемое в скобках равно

$$\frac{c^2 r_g^2 r^2}{16a^6} \simeq \frac{c^2 r_g^2}{16a^4}. \quad (3.130)$$

Рассмотрим Солнце как пример. Его поверхностный слой совершает один полный оборот с периодом $\simeq 27$ суток, что эквивалентно угловой скорости вращения $\omega_\odot \simeq 2,7 \times 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$. Поэтому второе слагаемое в скобках равно

$$\frac{1}{4} \omega_\odot^2 \simeq 1,8 \times 10^{-12} \text{ сек}^{-2}. \quad (3.131)$$

Первый член в скобках, учитывая, что гильбертов радиус Солнца $r_{g\odot} = 2,9 \times 10^5 \text{ см}$ и физический радиус Солнца $a_\odot = 7,0 \times 10^{10} \text{ см}$, в десять раз меньше предыдущего

$$\frac{c^2 r_{g\odot}^2}{16a_\odot^4} \simeq 2,0 \times 10^{-13} \text{ сек}^{-2}, \quad (3.132)$$

поэтому мы можем пренебречь первым членом в скобках даже для медленно вращающихся звёзд, таких как Солнце.

Таким образом, с вышеупомянутыми упрощениями, характеристичными для обычных звёзд, х.и.-уравнения Эйнштейна (3.123–3.128) принимают упрощённую форму

$$\rho_{\text{em}} = \frac{n\omega^2}{2\pi G} \left(\frac{1}{4} + \cot^2 \theta \right), \quad (3.133)$$

$$J_{\text{em}}^3 = -\frac{nc^2}{4\pi G} \frac{\omega r_g}{a^3} \frac{\cot \theta}{\sin \theta}, \quad (3.134)$$

$$U_{\text{em}}^{11} = -\frac{nc^2 \omega^2}{2\pi G} \left(\frac{1}{4} - \cot^2 \theta \right), \quad (3.135)$$

$$U_{\text{em}}^{12} = -\frac{nc^2}{2\pi G} \frac{\omega^2 \cot \theta}{r}, \quad (3.136)$$

$$U_{\text{em}}^{22} = \frac{nc^2 \omega^2}{2\pi G r^2} \left(\frac{1}{4} - \cot^2 \theta \right), \quad (3.137)$$

$$U_{\text{em}}^{33} = \frac{nc^2 \omega^2}{2\pi G r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{4} + \cot^2 \theta \right). \quad (3.138)$$

3.6 Решение уравнений Максвелла в безвихревом электромагнитном поле обычной вращающейся звезды

Как известно, электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла. Они состоят из двух групп. Общековариантная формулировка уравнений Максвелла имеет вид [20]

$$\nabla_{\sigma} F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad \nabla_{\sigma} F^{*\mu\sigma} = 0, \quad (3.139)$$

где первое уравнение даёт группу I, а второе уравнение даёт группу II. Здесь $F^{*\mu\sigma} = \varepsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ псевдотензор, дуальный тензору электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$, тогда как j^{μ} четырёхмерный вектор тока в данном электромагнитном поле.

В терминах хронометрически инвариантного формализма общековариантные уравнения Максвелла (3.139) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial E^i}{\partial t} + D E^i \right) &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (3.140)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II,} \quad (3.141)$$

подробности см. в главе 3 книги [18]. Здесь $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikn} E_k$ псевдотензор, дуальный вектору электрической напряжённости E_i поля, $H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}$ псевдовектор, дуальный тензору магнитной напряжённости H_{mn} , тогда как $D = h^{ik} D_{ik}$ скорость деформации пространства. См. эти определения в формуле (3.105) из §3.5.

Физически наблюдаемые плотность заряда ρ и вектор тока j^i являются х.и.-проекциями четырёхмерного вектора тока j^{μ}

$$\rho = \frac{1}{c} \frac{j_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad j^i = h_{\mu}^i j^{\mu}. \quad (3.142)$$

Поскольку рассматриваемое пространство стационарно (метрика жидкой сферы не зависит от времени), а электромагнитное

поле также стационарно, то члены, содержащие тензор деформации пространства D_{ik} и производные по времени от электрической E^i и магнитной H^{*i} напряжённостей поля обращаются в нуль. В этом случае х.и.-уравнения Максвелла (3.140–3.141) упрощаются

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (3.143)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II.} \quad (3.144)$$

Подставим формулы для гравитационно-инерциальной силы F_i (3.41) и угловой скорости вращения пространства A_{ik} (3.48–3.51), что мы получили для метрики пространства обычной вращающейся звезды (3.28). Также подставим полученные нами в этом же пространстве формулы для электрической напряжённости E^i и магнитной напряжённости H^{*i} (3.107) стационарного безвихревого электромагнитного поля.

Чтобы упростить вычисления, примем во внимание следующие обстоятельства. Так как для Солнца $\omega_\odot \approx 2,7 \times 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$, $r_{g\odot} = 2,9 \times 10^5 \text{ см}$, $a_\odot = 7,0 \times 10^{10} \text{ см}$, то приведённые ниже члены принимают следующие численные значения

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_g}{a} &= 4,1 \times 10^{-6} \\ \frac{r_g}{a^3} &= 8,5 \times 10^{-28} \text{ см}^{-2} \\ \frac{\omega^2}{c^2} &= 8,1 \times 10^{-33} \text{ см}^{-2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.145)$$

Для других обычных звёзд эти члены принимают численные значения в пределах нескольких порядков от приведённых выше. Поэтому в уравнениях для обычных звёзд указанные члены можно опустить.

В результате мы видим, что уравнения группы II х.и.-уравнений Максвелла (3.143–3.144) обращаются в нуль, а уравнения группы I

принимают следующую форму

$$\frac{3\varphi r_g}{2a^3} = 4\pi\rho, \quad \frac{\omega\varphi \cot\theta}{r^2 \sin\theta} = -2\pi j^3. \quad (3.146)$$

Рассмотренные уравнения Максвелла характеризуют электромагнитное поле, возникающее за счёт зарядов и токов — источников поля, определяющих правые члены уравнений группы I. Источники электромагнитного поля (заряды и токи) определяются плотностью заряда ρ и вектором тока j^i , являющимися х.и.-проекциями четырёхмерного вектора тока j^μ (3.142). Если бы правая часть уравнений была равна нулю, то это было бы электромагнитное поле без источников (существующее независимо от источников).

Источники электромагнитного поля, которыми являются плотность заряда ρ и вектор тока j^i , должны удовлетворять общековариантному закону сохранения электрического заряда

$$\nabla_\sigma j^\sigma = 0, \quad (3.147)$$

который также известен как уравнение непрерывности. Этот закон означает, что четырёхмерный вектор тока j^σ и, следовательно, его х.и.-проекции ρ и j^i (источники электромагнитного поля) сохраняются в четырёхмерном объёме поля.

Четырёхмерный электромагнитный потенциал A^σ должен удовлетворять общековариантному условию Лоренца

$$\nabla_\sigma A^\sigma = 0, \quad (3.148)$$

которое означает, что четырёхмерный потенциал поля A^σ и, следовательно, его х.и.-проекции φ и q^i , являющиеся х.и.-скалярным и х.и.-векторным потенциалами поля, сохраняются в четырёхмерном объёме поля.

В произвольном электромагнитном поле общековариантные закон сохранения (3.147) и условие Лоренца (3.148) имеют следующую х.и.-формулировку

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} + \rho D + * \widetilde{\nabla}_i j^i - \frac{1}{c^2} F_i j^i = 0, \quad (3.149)$$

$$\frac{1}{c} \frac{* \partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c} D + * \widetilde{\nabla}_i q^i - \frac{1}{c^2} F_i q^i = 0, \quad (3.150)$$

где мы обозначаем ${}^*\widetilde{\nabla}_i = {}^*\nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$. См. главу 3 книги [18].

Напомним, что мы рассматриваем стационарное безвихревое электромагнитное поле. Это означает, что условия (3.106) должны выполняться как для потенциалов поля φ и q^i , так и для источников поля ρ и j^i . Как легко видеть, в этом случае и поскольку мы рассматриваем пространство, которое не деформируется ($D_{ik} = 0$), х.и.-закон сохранения (3.149) и х.и.-условие Лоренца (3.150) удовлетворяются как тождества.

3.7 Решение уравнений Максвелла в вихревом электромагнитном поле обычной вращающейся звезды

Рассмотрим обычную вращающуюся звезду с вихревым электромагнитным полем. Это означает, что ротор q_{ik} трёхмерного х.и.-векторного потенциала q_i поля отличен от нуля

$$q_{ik} = \frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^i} \neq 0. \quad (3.151)$$

Как показано в главе 3 книги [18], где мы рассматривали релятивистскую электродинамику, четырёхмерный потенциал электромагнитного поля A^α имеет вид

$$A^\alpha = \varphi \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 1, \quad (3.152)$$

а х.и.-проекции A^α имеют вид

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \widetilde{\varphi}, \quad A^i = q^i = \frac{\widetilde{\varphi}}{c} v^i, \quad (3.153)$$

где $\widetilde{\varphi}$ х.и.-скалярный релятивистский потенциал электромагнитного поля, имеющий вид

$$\widetilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad v^2 = h_{ik} v^i v^k. \quad (3.154)$$

Пусть электрические заряды движутся внутри звезды только вдоль экваториальной координаты ϕ , являющейся географической долготой звезды (в сферических координатах r, θ, ϕ). Примем также, что заряды движутся с малыми скоростями ($v^2 \ll c^2$). В этом случае $\widetilde{\varphi} = \varphi$. Следуя нашему предыдущему рассмотрению обычных

вращающихся звёзд, мы также полагаем, что $\varphi = const$ и $q^1 = q^2 = 0$. Тогда х.и.-компоненты A^α принимают вид

$$\varphi = const, \quad q^3 = \frac{\varphi}{c} v^3, \quad (3.155)$$

где $v^3 = \frac{d\phi}{d\tau}$ физически наблюдаемая скорость зарядов вдоль экваториальной координаты ϕ (в сферических координатах r, θ, ϕ).

Полагая, что завихрение электромагнитного поля обусловлено только вращением звезды, мы имеем

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \omega, \quad (3.156)$$

тогда ненулевые компоненты трёхмерного х.и.-векторного потенциала q_i и его ротора q_{ik} имеют вид

$$q^3 = \frac{\varphi\omega}{c}, \quad q_3 = \frac{\varphi\omega}{c} r^2 \sin^2\theta, \quad (3.157)$$

$$q_{31} = \frac{\partial q_3}{\partial r} = \frac{2\varphi\omega}{c} r \sin^2\theta, \quad (3.158)$$

$$q_{23} = -\frac{\partial q_3}{\partial \theta} = -\frac{2\varphi\omega}{c} r^2 \sin\theta \cos\theta. \quad (3.159)$$

Подставим теперь формулы для A_{ik} (3.48–3.51), полученные для метрики пространства обычной вращающейся звезды (3.28), в определение тензора магнитной напряжённости H_{ik} (3.105). Получаем ненулевые компоненты этого тензора

$$H_{23} = -\frac{2\varphi\omega r^2 \sin\theta}{c} \left[\cos\theta + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{r_g r^2}{a^3} \right) \right], \quad (3.160)$$

$$H_{31} = \frac{2\varphi\omega r}{c} \left[\sin^2\theta - \cos\theta \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{r_g r^2}{a^3} \right) \right], \quad (3.161)$$

и псевдовектора магнитной напряжённости H^{*i} (3.105)

$$H^{*1} = -\frac{2\varphi\omega}{c} \left[\left(1 - \frac{r_g r^2}{2a^3} \right) \cos\theta + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{3r_g r^2}{2a^3} \right) \right], \quad (3.162)$$

$$H^{*2} = \frac{2\varphi\omega}{cr} \left[\left(1 - \frac{r_g r^2}{2a^3} \right) \sin\theta - \cot\theta \left(1 + \frac{3r_g}{4a} - \frac{3r_g r^2}{2a^3} \right) \right], \quad (3.163)$$

а его ковариантные (с нижним индексом) версии получаются как $H_{*1} = h_{11}H^{*1}$ и $H_{*2} = h_{22}H^{*2}$. В рамках нашего приближения, т.е. пренебрегая членами более высокого порядка, мы имеем

$$H^{*1} = -\frac{2\varphi\omega}{c} \left(\cos\theta + \frac{1}{2} \right), \quad (3.164)$$

$$H^{*2} = \frac{2\varphi\omega}{cr} (\sin\theta - \cot\theta). \quad (3.165)$$

Что касается х.и.-уравнений Максвелла, то они в стационарном электромагнитном поле имеют вид (3.143–3.144)

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (3.166)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II}. \quad (3.167)$$

Подставим в эти уравнения полученные формулы для магнитной напряжённости поля, а также формулы для электрической напряжённости поля (3.105), адаптированные для стационарного электромагнитного поля обычной звезды

$$E^{*ik} = -\varepsilon^{ikn} E_n, \quad E_i = -\frac{\varphi}{c^2} F_i = \frac{\varphi r_g r}{2a^3}. \quad (3.168)$$

Уравнения группы II (3.167) удовлетворяются тождественно. Уравнения группы I (3.167) принимают вид

$$\frac{3\varphi r_g}{2a^3} = 4\pi\check{\rho}, \quad \frac{\omega\varphi \cot\theta}{r^2 \sin\theta} = -2\pi\check{j}^3, \quad (3.169)$$

где $\check{\rho}$ и \check{j}^3 плотность заряда и ток данного вихревого электромагнитного поля.

Эти решения идентичны решениям (3.146), полученным в безвихревом электромагнитном поле обычной вращающейся звезды. Также легко получить, что уравнение сохранения $\nabla_\sigma j^\sigma = 0$ (3.147)

и условие Лоренца $\nabla_{\sigma} A^{\sigma} = 0$ (3.148), х.и.-инвариантные формулы которых имеют вид (3.149) и (3.150), удовлетворяются в вихревом электромагнитном поле как тождества.

Это означает, что все результаты, полученные ранее в безвихревом электромагнитном поле обычной вращающейся звезды, верны и в случае, когда электромагнитное поле звезды является вихревым.

Это происходит потому, что все слагаемые, появляющиеся в уравнениях из-за завихрения электромагнитного поля, обращаются в нуль в рамках приближения 2-го порядка. В терминах физики это означает, что наличие завихрения в электромагнитном поле не меняет источников поля обычной вращающейся звезды. Вихревое электромагнитное поле может иметь смысл только в случае экзотических звёзд, характеристики которых отличаются от характеристик обычных звёзд. Мы увидим разницу в главе 5 при рассмотрении быстро вращающихся нейтронных звёзд (пульсаров).

3.8 Геометризация электромагнитного поля для обычной вращающейся звезды

Используя геометрическую формулу скалярного электромагнитного потенциала

$$\varphi = c^2 \sqrt{\frac{n}{G}}, \quad (3.170)$$

которая следует из (3.119), запишем неисчезающие х.и.-уравнения Максвелла (3.146), или (3.169), что то же самое, в виде

$$\check{\rho} = \rho = \frac{3c^2 r_g}{8\pi a^3} \sqrt{\frac{n}{G}} = \frac{3c^2}{8\pi a^2} \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{r_g}{a}, \quad (3.171)$$

$$\check{j}^3 = j^3 = -\frac{\omega c^2}{2\pi r^2} \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta}, \quad (3.172)$$

$$\check{j} = j = \sqrt{h_{ik} j^i j^k} = \sqrt{h_{33} j^3 j^3} = \frac{\omega c^2 \cot \theta}{2\pi r} \sqrt{\frac{n}{G}}, \quad (3.173)$$

где $\check{\rho}$ плотность заряда, \check{j}^3 ток вихревого электромагнитного поля, тогда как ρ и j^3 подразумевают безвихревое поле. Безразмерный коэффициент $n = \frac{G\varphi^2}{c^4}$ (3.119) принимает значения в диапазоне $0 < n < \frac{1}{4}$. Чтобы понять, почему $\frac{1}{4}$, см. формулу (3.118).

Источники электромагнитного поля здесь выражаются только через геометрические характеристики пространства звезды и фундаментальные константы. Это означает, что мы полностью геометризовали источники стационарного электромагнитного поля обычной вращающейся звезды.

Теперь выразим электрическую и магнитную напряжённости поля через геометрическую формулу скалярного электромагнитного потенциала φ (3.170)

$$E^1 = E_1 = \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{c^2 r_g r}{2a^3}, \quad (3.174)$$

$$H^{*1} = -2\omega c \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right) = -2c \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\omega \cos \theta + \Omega^{*1} \right), \quad (3.175)$$

$$H^{*2} = \frac{2\omega c}{r} \sqrt{\frac{n}{G}} (\sin \theta - \cot \theta) = 2c \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\frac{\omega \sin \theta}{r} - \Omega^{*2} \right), \quad (3.176)$$

$$H_{*1} = h_{11} H^{*1} = H^{*1}, \quad (3.177)$$

$$H_{*2} = h_{22} H^{*2} = r^2 H^{*2}, \quad (3.178)$$

где, согласно нашему расчёту (3.109–3.110) в метрике пространства обычной вращающейся звезды (3.28),

$$\Omega^{*1} = \Omega_{*1} = \frac{\omega}{2}, \quad \Omega^{*2} = \frac{\omega \cot \theta}{r}, \quad \Omega_{*2} = \omega r \cot \theta, \quad (3.179)$$

$$\Omega_{*j} \Omega^{*j} = \omega^2 \left(\frac{1}{4} + \cot^2 \theta \right). \quad (3.180)$$

Отсюда мы выражаем плотность $\check{\rho}_{\text{em}}$ и поток импульса \check{J}_{em}^3 вихревого электромагнитного поля. Согласно общим формулам (3.102) и (3.103) для любого электромагнитного поля, мы получаем

$$\begin{aligned} \check{\rho}_{\text{em}} &= \frac{n}{2\pi G} \left(\frac{1}{4c^2} F_j F^j + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) + \frac{\omega^2}{2\pi} \frac{n}{G} = \\ &= \rho_{\text{em}} + \frac{\omega^2}{2\pi} \frac{n}{G}, \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\check{J}_{\text{em}}^3 = \frac{c^2 r_g r}{4\pi a^3 \sin \theta} \frac{n}{G} \left(\frac{\omega \sin \theta}{r} - \Omega^{*2} \right) = J_{\text{em}}^3 + \frac{c^2 r_g \omega}{4\pi a^3} \frac{n}{G}. \quad (3.182)$$

Как видим, наблюдаемые характеристики электромагнитного поля выражаются здесь только через геометрические характеристики пространства звезды и фундаментальные константы. Это касается как вихревого электромагнитного поля, так и безвихревого поля звезды. В математическом смысле это означает, что электромагнитное поле обычной вращающейся звезды полностью геометризовано.

Итак, в случае обычной вращающейся звезды уравнения Максвелла и уравнения поля Эйнштейна удовлетворяются. Это означает, что они представляют собой самосогласованную систему уравнений Эйнштейна-Максвелла, полностью описывающую как гравитационные, так и электромагнитные явления внутри обычных вращающихся звёзд.

Наконец, мы можем заключить кое-что довольно интересное для астрофизики, предварительно записав формулу для плотности заряда ρ (3.171) в виде

$$\rho = \frac{3c^2}{8\pi G a^2} \sqrt{nG} \frac{r_g}{a}. \quad (3.183)$$

Здесь первый множитель совпадает с формулой для “критической плотности” вещества во Вселенной

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3c^2}{8\pi G a^2} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (3.184)$$

известной из наблюдательной космологии, $H = \frac{c}{a}$ постоянная Хаббла, тогда как a радиус наблюдаемой Вселенной. По аналогии со Вселенной критическая плотность формально может быть введена для любой жидкой звезды. Поэтому мы можем выразить плотность заряда ρ звезды как

$$\rho = \rho_{\text{cr}} \sqrt{nG} \frac{r_g}{a}, \quad (3.185)$$

где $n < \frac{1}{4}$ и $\sqrt{G} = 2,6 \times 10^{-4} \text{ см}^{3/2} \text{ грамм}^{-1/2} \text{ сек}^{-1}$.

Если плотность заряда $\rho = \rho_{\text{cr}} \sqrt{nG}$, то физический радиус звезды совпадает с её гильбертовым радиусом $a = r_g$. Так как $r_g \ll a$ для обычных звёзд, мы заключаем, что плотность заряда внутри любой обычной вращающейся звезды много меньше, чем $\rho_{\text{cr}} \sqrt{nG}$, т.е.

$$\rho \ll \rho_{\text{cr}} \sqrt{nG}. \quad (3.186)$$

В конце следует сказать несколько слов. Общая теория относительности — это геометрическая теория пространства-времени-материи. Её первоочередная задача — выразить все физические явления как проявления геометрии пространства (пространства-времени). Гравитационное поле было первоначально геометризовано Эйнштейном благодаря уравнениям поля (уравнениям Эйнштейна). Однако в то время электромагнитное поле не было геометризовано: как показал ещё Эйнштейн, математически эта задача в общем случае весьма нетривиальна. Тем не менее решить эту задачу можно в частном случае, когда некоторые условия упрощают математику. Таким образом, как было показано выше, мы полностью геометризовали электромагнитное поле во внутреннем поле обычной вращающейся звезды.

3.9 Заключение

Эта глава дополняет предыдущую главу 2, в которой мы рассматривали обычные звёзды, включая Солнце. В этой главе были решены три основные задачи.

Первое. В главе 2 при рассмотрении метрики внутреннего пространства жидкой звезды мы шли историческим путём, как это делал Шварцшильд при введении метрики. А именно, — даже когда мы вводили полную форму метрики внутреннего пространства жидкой сферы (которая содержит сингулярности), мы использовали обозначения Шварцшильда. Это обозначение происходит от общей формы сферически-симметричной метрики и, таким образом, содержит коэффициенты e^{ν} и e^{λ} , которые являются функциями r и t . Это — общий метод записи любой сферически-симметричной метрики. Когда мы вычисляем физически наблюдаемые характеристики такого метрического пространства, мы получаем их в форме, также выраженной через неизвестные e^{ν} и e^{λ} . Таким образом, мы получаем физически наблюдаемые характеристики пространства в неполном виде, что требует дальнейшего вычисления коэффициентов e^{ν} и e^{λ} . Это создаёт огромные трудности при решении частных задач в рамках метрики такого пространства. Поэтому в этой главе мы изначально ввели метрику внутреннего пространства жидкой сферы в окончательном виде, где коэффициенты e^{ν} и e^{λ} выражены через основные характеристики сферы, такие как её физический

радиус и гильбертов радиус, а также через радиальную координату r и время t . В результате мы получили все компоненты фундаментального метрического тензора в явном виде, без неизвестных коэффициентов. Это было предметом §3.1 и §3.2. Поэтому, как только мы (или кто-то другой) будем дальше решать задачи для метрики внутреннего пространства обычной жидкой звезды, мы изначально будем иметь формулы для всех физически наблюдаемых характеристик её внутреннего пространства.

Второе. Мы рассмотрели метрику пространства невращающейся жидкой сферы. Тем не менее мы знаем, что большинство звёзд вращается. Скорее всего все звёзды вращаются, но многие из них вращаются медленно, так что доплеровское расщепление спектральных линий, обусловленное вращением, не может быть зарегистрировано современными методами спектроскопии. В любом случае, если мы рассматриваем жидкую звезду, обладающую электромагнитным полем, мы должны рассматривать метрику внутреннего пространства вращающейся жидкой сферы. Эта метрика была введена в §3.3, затем мы ввели уравнения поля Эйнштейна и уравнения Максвелла в форме, удовлетворяющей метрике. Мы показали, что электрическая составляющая электромагнитного поля звезды непосредственно зависит от её гравитационного поля, а магнитная — от её вращения. Кроме того, мы обнаружили, что вихревой характер электромагнитного поля не играет существенной роли в обычных вращающихся звёздах.

Третье, о самом важном достижении этой главы. В §3.8 мы показали, что в метрике внутреннего пространства вращающейся жидкой звезды физически наблюдаемые характеристики электромагнитного поля выражаются только через геометрические характеристики пространства звезды и фундаментальные константы. Это означает, что во внутреннем поле вращающейся жидкой звезды электромагнитное поле полностью геометризовано.

4.1 Условие второй космической скорости для звезды

С поверхности любой звезды постоянно извергается поток частиц звёздного вещества. Часть потока состоит из настолько быстрых частиц, что они навсегда покидают гравитационное поле звезды и уходят во внешний космос, создавая таким образом звёздный ветер.* С точки зрения нашей математической теории жидких звёзд это означает, что частицы поверхностного слоя звезды движутся быстрее второй космической скорости для звезды.

Почему частицы звёздного вещества покидают поверхность звезды? Можно ли уподобить этот процесс кипячению воды в чайнике или это что-то совсем другое? Поиск ответа на этот вопрос и составляет нашу исследовательскую задачу в этой главе.

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны изучить движение частиц звёздного вещества внутри звезды. Для этого сначала найдём формулу для второй космической скорости, выраженную через компоненты метрики пространства жидкой звезды. Затем выведем уравнения движения частиц звёздного вещества внутри звезды. Таким образом, мы получим физические условия, при которых частицы поверхностного слоя звезды движутся быстрее второй космической скорости. После этого мы сможем решать уравнения движения частиц звёздного вещества.

Вторая космическая скорость v_{II} , представляет собой скорость, с которой частица может навсегда “покинуть” гравитационное поле массивного тела.†

*Звёзды Вольфа-Райе отличаются от всех обычных звёзд чрезвычайно мощным звёздным ветром: этот поток настолько мощный, что звезда Вольфа-Райе теряет значительную часть своей массы со звёздным ветром.

†Первая космическая скорость v_I , известная также как орбитальная скорость, позволяет частице вращаться вокруг массивного тела, не падая на его поверхность.

Предположим, что частицы звёздного вещества движутся радиально от центра звезды к её поверхности. Пусть частицы достигнут поверхности, а затем навсегда покинут звезду во внешний космос, образуя таким образом звёздный ветер. Поэтому формулу для скорости частиц звёздного вещества, которая выражается через вторую космическую скорость для звезды, мы называем *условием второй космической скорости*.

Для сферически-симметричного тела с массой M вторая космическая скорость на расстоянии r от его центра равна

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (4.1)$$

Эта формула исходит из метрики точечной массы (1.1),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.2)$$

где $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, тогда как M масса тела (источника поля).

Как показано в главе 2, поле любой жидкой звезды имеет две области. Они описываются двумя разными метриками. Метрика жидкой сферы действительна от центра звезды ($r = 0$) до её поверхности ($r = a$). Метрика точечной массы действительна в космосе выше поверхности звезды. То есть, частицы звёздного вещества движутся внутри звезды по траекториям, определяемым метрикой жидкой сферы. Если частицы покидают звезду, они движутся в космосе по траекториям, определяемым метрикой точечной массы.

Таким образом, скорость частиц звёздного вещества, летящих с поверхности звезды во внешний космос, получается как решение уравнений движения массовой частицы согласно метрике точечной массы. Выраженное через вторую космическую скорость, это — условие второй космической скорости для звезды.

Мы выводим эту формулу как решение х.и.-уравнений неизотропных геодезических [18, 19]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k &= 0 \\ \frac{d(mv^i)}{d\tau} + 2m \left(D_k^i + A_k^i \right) v^k - m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.3)$$

которые представляют собой уравнения наблюдаемого движения массовой частицы, движущейся с наблюдаемой скоростью v^i . Эти уравнения получаются как х.и.-проекции общековариантных уравнений неизотропных геодезических. Подробнее см. [18, 19].

Мы решаем уравнения (4.3) для частицы звёздного вещества, движущейся вдоль радиального направления r . Поэтому

$$v^1 = \frac{dr}{d\tau} \neq 0, \quad v^2 = v^3 = 0. \quad (4.4)$$

Чтобы решить уравнения (4.3), нам нужно найти физически наблюдаемые характеристики пространства метрики точечной массы (4.2). Как видно из метрики (4.2), это пространство не вращается и не деформируется ($A_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$). Отличны от нуля только гравитационно-инерциальная сила F_i и символы Кристоффеля Δ_{nk}^i . Таким образом, для метрики (4.2) мы получаем

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}, \quad (4.5)$$

$$h_{11} = \frac{1}{h^{11}} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad h_{22} = \frac{1}{h^{22}} = r^2, \quad h_{33} = \frac{1}{h^{33}} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (4.6)$$

$$\Delta_{11}^1 = -\frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad \Delta_{22}^1 = \frac{\Delta_{33}^1}{\sin^2 \theta} = -r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad (4.7)$$

$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta. \quad (4.8)$$

Отсюда получаем, что х.и.-уравнения движения (4.3) в пространстве метрики точечной массы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} &= -\frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{dr}{d\tau} \\ \frac{1}{m} \frac{d}{d\tau} \left(m \frac{dr}{d\tau} \right) - \frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{c^2 r_g}{2r^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.9)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\tau}. \quad (4.10)$$

Здесь, обозначив релятивистскую массу частицы на поверхности ($r = a$) звезды как $m_{(0)}$ (это — “стартовая масса” частицы при её выходе из звезды), и обозначив наблюдаемую скорость частицы при выходе из звезды как \dot{r}_0 , мы имеем

$$m = m_{(0)} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}, \quad m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g^3}{a^3}\right)}}}. \quad (4.11)$$

Приступим к решению х.и.-уравнений движения (4.9). Подставив скалярное уравнение в векторное, получаем векторное уравнение движения вдоль радиальной координаты r

$$\ddot{r} - \frac{r_g}{r^2} \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{c^2 r_g}{2r^2} = 0. \quad (4.12)$$

Обозначим $\dot{r} = y$. Тогда

$$\ddot{r} = yy', \quad y' = \frac{dy}{dr}, \quad (4.13)$$

и уравнение (4.12) принимает вид

$$yy' - \frac{r_g}{r^2} \frac{y^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{c^2 r_g}{2r^2} = 0. \quad (4.14)$$

Полагая $u(r) = y^2$, сводим его к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$u' - \frac{2r_g}{r^2} \frac{u}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{c^2 r_g}{r^2} = 0. \quad (4.15)$$

Это уравнение имеет следующее точное решение

$$u = e^{-F} \left(u_0 + \int_r^a g(r) e^F dr \right), \quad u_0 = y_0^2 = \dot{r}_0^2, \quad (4.16)$$

где входящие в него функции имеют вид

$$F(r) = \int_r^a f(r) dr, \quad f(r) = -\frac{2r_g}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad g(r) = \frac{c^2 r_g}{r^2}. \quad (4.17)$$

Интегрируя функцию $f(r)$, получаем

$$F(r) = \ln \left(\frac{1 - \frac{r_g}{a}}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)^2, \quad e^F = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{a}}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)^2, \quad (4.18)$$

$$\int_r^a \frac{c^2 r_g \left(1 - \frac{r_g}{a}\right)^2 dr}{r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2} = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{a}\right) \left(1 - \frac{1 - \frac{r_g}{a}}{1 - \frac{r_g}{r}}\right). \quad (4.19)$$

Подставляя (4.17–4.19) в (4.16) и пренебрегая высшими степенями члена $\frac{r_g}{a}$ (они ничтожны для обычных звёзд), получаем

$$i^2 = i_0^2 \left(1 + \frac{2r_g}{a} - \frac{2r_g}{r}\right) + c^2 \left(\frac{r_g}{a} - \frac{r_g}{r}\right). \quad (4.20)$$

Отсюда мы получаем формулу для лучевой скорости частицы звёздного вещества, покидающей звезду со звёздным ветром. Поскольку v_{II} (4.1) на поверхности звезды ($r = a$) принимает вид

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = c \sqrt{\frac{r_g}{r}} = c \sqrt{\frac{r_g}{a}} \quad (4.21)$$

мы получаем лучевую скорость частицы \dot{r}

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = c \sqrt{\frac{i_0^2 + v_{II}^2}{c^2} - \frac{r_g}{r} + \frac{2i_0^2}{c^2} \left(\frac{v_{II}^2}{c^2} - \frac{c^2 r_g}{r}\right)}. \quad (4.22)$$

Итак, эта формула и есть условие второй космической скорости, которое мы искали. Если $i_0 = 0$, то уравнение (4.22) демонстрирует совершенно очевидное условие

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{v_{II}^2 - \frac{c^2 r_g}{r}} < v_{II}. \quad (4.23)$$

Согласно этому условию частица звёздного вещества не может покинуть гравитационное поле звезды, если её стартовая скорость на поверхности звезды равна нулю. Поэтому при дальнейшем рассмотрении звёздного ветра во всех уравнениях теории всегда предполагается $i_0 \neq 0$.

Получим окончательное упрощение условия второй космической скорости (4.22). Сравним численные значения членов под корнем. Обозначим последний член под корнем как

$$q = \frac{2\dot{r}_0^2}{c^2} \left(\frac{v_{II}^2}{c^2} - \frac{c^2 r_g}{r} \right). \quad (4.24)$$

Для Солнца, типичной обычной звезды, имеем: $v_{II} = 617$ км/сек, $r_g = 2,9$ км, $\dot{r}_0 = 750$ км/сек* и $a = 7,0 \times 10^5$ км. Поскольку $q = 0$ при $r = a$, примем $r > a$ как для звёздного ветра. Тогда мы получаем

$$\frac{\dot{r}_0^2 + v_{II}^2}{c^2} \approx 10^{-5}, \quad \frac{r_g}{r} < 4,1 \times 10^{-6}, \quad q < 5,3 \times 10^{-11}. \quad (4.25)$$

Для типичной звезды класса Вольфа-Райе (см. таблицу 1.1) имеем: $v_{II} = 982$ км/сек, $r_g = 150$ км, $\dot{r}_0 = 2200$ км/сек и $a = 1,4 \times 10^7$ км. Поэтому для типичной звезды Вольфа-Райе мы получаем

$$\frac{\dot{r}_0^2 + v_{II}^2}{c^2} \approx 6,4 \times 10^{-5}, \quad \frac{r_g}{r} < 1,1 \times 10^{-5}, \quad q < 1,2 \times 10^{-9}. \quad (4.26)$$

Член q настолько мал, что им можно пренебречь. Поэтому формула для условия второй космической скорости имеет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = c \sqrt{\frac{\dot{r}_0^2}{c^2} + \frac{v_{II}^2}{c^2} - \frac{r_g}{r}}. \quad (4.27)$$

Как следует из этой итоговой формулы, на поверхности звезды ($r = a$) скорость частицы звёздного вещества равна \dot{r}_0 .

4.2 Светоподобные частицы внутри обычной звезды

Рассмотрим теперь, как ведут себя частицы звёздного вещества и частицы света внутри звезды (звёзды наполнены не только веществом, но и светом). Сначала рассмотрим светоподобные (безмассовые) частицы. Такие частицы движутся по изотропным геодезическим линиям.

* $\dot{r}_0 \approx 750$ км/сек типично для частиц быстрой компоненты солнечного ветра, состав которой тот же, что и фотосферы. Напротив, медленная составляющая солнечного ветра имеет состав, близкий к составу короны. Её частицы летят от Солнца со скоростью около 400 км/сек.

Х.и.-уравнения изотропных геодезических вид [18, 19]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_i c^i + \frac{\omega}{c^2} D_{ik} c^i c^k &= 0 \\ \frac{d(\omega c^i)}{d\tau} + 2\omega (D_k^i + A_k^i) c^k - \omega F^i + \omega \Delta_{nk}^i c^n c^k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.28)$$

и являются уравнениями наблюдаемого движения светоподобной частицы (фотона с частотой ω), движущейся с наблюдаемой скоростью света c^i . Эти х.и.-уравнения выводятся как наблюдаемые проекции общековариантных уравнений изотропных геодезических.

Как и ранее, мы полагаем, что звезда не вращается и не деформируется ($A_{ik} = 0, D_{ik} = 0$). Также мы рассматриваем фотон, который движется строго радиально (в направлении $x^1 = r$) от центра звезды к её поверхности. В этом случае х.и.-уравнения изотропных геодезических (4.28) внутри обычной звезды принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_1 c^1 &= 0 \\ \frac{d(\omega c^1)}{d\tau} - \omega F^1 + \omega \Delta_{11}^1 c^1 c^1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.29)$$

где наблюдаемая (световая) скорость фотона равна $c^1 = \frac{dr}{d\tau}$.

Рассмотрим х.и.-скалярное уравнение геодезических (4.29). Подставляя F_1 (3.6) метрики жидкой сферы, имеем

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} = - \frac{r_g}{a^3} \frac{r}{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.30)$$

или, в виде, который легко интегрируется

$$\begin{aligned} d \ln \omega &= - \frac{d \left| 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}{\left| 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right|} = \\ &= d \ln \frac{1}{\left| 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Мы изучаем только фотоны внутри звезды, т.е. ищем решение для интервала $r_g \leq r \leq a$. После интегрирования получаем

$$\omega = \frac{B}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad B = \text{const.} \quad (4.32)$$

Предположим, что фотоны исходят из гильбертовой поверхности звезды ($r_0 = r_g$). Тогда

$$B = \omega_0 \left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g^3}{a^3}} \right), \quad (4.33)$$

где ω_0 есть начальное значение частоты фотона (на гильбертовой поверхности внутри звезды). Поскольку $r_g \ll a$ для обычных звёзд, мы пренебрегаем членами высшего порядка от $\frac{r_g}{a}$. Тогда решение х.и.-скалярного уравнения геодезических (4.32), показывающее частоту фотона, принимает вид

$$\omega = \frac{\omega_0 \left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1 \right)}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (4.34)$$

Теперь рассмотрим х.и.-векторное уравнение геодезических (4.29). При радиальном движении фотона оно имеет вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Delta_{11}^1 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - F^1 = 0. \quad (4.35)$$

Обозначим $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{d\tau^2}$ и $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$, затем подставим $\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau}$ (4.30), Δ_{11}^1 (3.8) и F^1 (3.7). Таким образом, х.и.-векторное уравнение геодезических (4.35) преобразуется в нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка по r

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} + \\ + \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} + \frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

В таком виде уравнение просто нерешаемо. Поэтому упростим его формулой для \dot{r}^2 , взятой из очевидного соотношения $h_{ik} c^i c^k = c^2$, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} = c^2. \quad (4.37)$$

В результате исходное уравнение (4.36) принимает вид

$$\ddot{r} + \frac{c^2 r_g r}{a^3} = 0. \quad (4.38)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}} = \frac{v_{II}}{a} = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}, \quad (4.39)$$

которая, как видите, зависит от второй космической скорости v_{II} (4.21), рассчитанной для звезды.

В общем случае частота Ω (4.39) зависит только от массы M и радиуса a , которые являются интегральными характеристиками звезды. Поэтому мы называем её *собственной частотой звезды*.

В таблице 4.1 приведены численные значения собственной частоты Ω , вычисленные нами для типичных представителей известных классов звёзд согласно нашей теории жидких звёзд.

Собственная частота Ω звезды достигает предельно большой величины $\Omega_{\max} = \frac{c}{a}$ на $r_g = a$. Это — случай гравитационных коллапсаров (чёрных дыр), который применим и ко Вселенной в целом. По наблюдательным оценкам, радиус Вселенной равен $a = 1,3 \times 10^{28}$ см и равен её гильбертовому радиусу r_g . Таким образом, Вселенная представляет собой огромный гравитационный коллапсар. Вычисляя собственную частоту Ω для Вселенной, мы получаем

$$\Omega_{\max} = \frac{c}{a} = 2,3 \times 10^{-18} \text{ сек}^{-1}, \quad (4.40)$$

что соответствует числовому значению постоянной Хаббла, которое равно $H = \frac{\dot{c}}{a} = (2,3 \pm 0,3) \times 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$. В этом случае интегральная масса Вселенной должна быть, согласно (4.39),

$$M = \frac{\Omega^2 a^3}{2G} = 8,8 \times 10^{55} \text{ грамм}, \quad (4.41)$$

Объект	Масса грамм	Радиус a , см	Собств. частота Ω , сек ⁻¹
Звёзды Вольфа-Райе	$1,0 \times 10^{35}$	$1,4 \times 10^{12}$	$7,0 \times 10^{-5}$
Красный сверхгигант*	$4,0 \times 10^{34}$	$7,0 \times 10^{13}$	$1,6 \times 10^{-7}$
Белый сверхгигант [†]	$3,4 \times 10^{34}$	$4,8 \times 10^{12}$	$6,4 \times 10^{-6}$
Солнце	$2,0 \times 10^{33}$	$7,0 \times 10^{10}$	$8,8 \times 10^{-4}$
Юпитер (протозвезда)	$1,9 \times 10^{30}$	$7,1 \times 10^9$	$8,4 \times 10^{-4}$
Красные карлики	$6,7 \times 10^{32}$	$2,3 \times 10^{10}$	$2,7 \times 10^{-3}$
Коричневый карлик [‡]	$4,1 \times 10^{31}$	$7,0 \times 10^9$	$7,4 \times 10^{-2}$
Белый карлик [§]	$2,0 \times 10^{33}$	$6,4 \times 10^8$	1,0
Вселенная	$8,8 \times 10^{55}$	$1,3 \times 10^{28}$	$2,3 \times 10^{-18}$

*Бетельгейзе. † Ригель. ‡Corot-Ехо-3. §Сириус В.

Таблица 4.1: Собственная частота Ω для типичных звёзд известных классов, а также для Вселенной.

что совпадает с наблюдаемым диапазоном средней плотности вещества во Вселенной, который, согласно астрономическим оценкам, составляет от 10^{-28} до 10^{-31} грамм/см³.

Вернёмся теперь к х.и.-векторному уравнению движения светоподобных частиц внутри жидкой звёзды в его финальной форме (4.38). Это уравнение решается как

$$r = B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{r_g}{a}} \frac{c\tau}{a} \right) + B_2 \sin \left(\sqrt{\frac{r_g}{a}} \frac{c\tau}{a} \right), \quad (4.42)$$

где B_1 и B_2 постоянные интегрирования. Полагая r и \dot{r} в начальный момент физически наблюдаемого времени $\tau_0 = 0$ равными $r_0 = r_g$ и $\dot{r}_0 = c$, мы получаем константы интегрирования

$$B_1 = r_g, \quad B_2 = a \sqrt{\frac{a}{r_g}}. \quad (4.43)$$

В результате мы получаем окончательное решение для радиальной координаты r светоподобной частицы, движущейся радиально внутри звезды от её центра к поверхности

$$r = r_g \cos \Omega\tau + a \sqrt{\frac{a}{r_g}} \sin \Omega\tau, \quad \Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}}, \quad (4.44)$$

которое по сути является уравнением гармонических колебаний $r = A_1 \cos \Omega \tau + A_2 \sin \Omega \tau$. Дифференцируя решение (4.44), мы получаем скорость колебаний фотона

$$\dot{r} = c \cos \Omega \tau - \frac{cr_g}{a} \sin \Omega \tau, \quad \Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}}. \quad (4.45)$$

Как видно из решения (4.44), вся светоподобная материя каждой звезды колеблется с частотой Ω (4.39), которая является собственной частотой этой конкретной звезды и определяется её массой и радиусом. Это колебание происходит с двумя амплитудами:

- а) Амплитуда $A_1 = r_g$ совпадает с радиусом внутреннего пространственного разрыва поля звезды на поверхности её гильбертова ядра, где выделяется звёздная энергия;
- б) Амплитуда $A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$ совпадает с внешним пространственным разрывом поля звезды (подробнее см. главу 2). Внешний пространственный разрыв находится вне звезды, во внешнем космосе. Для Солнца ($a = 7,0 \times 10^{10}$ см, $r_g = 2,9 \times 10^5$ см) мы получаем $A_2 = 3,4 \times 10^{13}$ см = 2,3 а.е., что является расстоянием от Солнца до максимальной концентрации астероидов в поясе астероидов. Это означает, что светоподобная звёздная материя каждой звезды колеблется с одной и той же частотой как на сферической поверхности внешнего пространственного разрыва в поле этой конкретной звезды, в далёком космосе, так и на поверхности гильбертова ядра глубоко внутри этой звезды.

Упомянутое колебание светоподобной материи каждой звезды обусловлено гравитационным полем этой конкретной звезды (создаваемым её массой M).

Как это колебание влияет на частоту фотона? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим полученное решение для частоты фотона ω (4.34) в двух предельных случаях, соответствующих двум амплитудам колебаний: $r = A_1 = r_g$ и $r = A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$. Таким образом, частота принимает следующие численные значения

$$r = A_1 = r_g, \quad \omega = \omega_0 \frac{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1} = \omega_0, \quad (4.46)$$

$$r = A_2 = \frac{a^2}{r_g}, \quad \omega = \omega_0 \frac{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}}. \quad (4.47)$$

Как видно из этих формул, это колебание не меняет частоту звёздного излучения вблизи гильбертова ядра (в центре звезды), но влияет на частоту звёздного излучения на больших расстояниях от гильбертова ядра.

4.3 Частицы звёздного вещества внутри обычной звезды

Такие частицы движутся по неизотропным геодезическим. Х.и.-уравнения неизотропных геодезических [18, 19] имеют вид (4.3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k &= 0 \\ \frac{d(mv^j)}{d\tau} + 2m(D_k^j + A_{k.}^j) v^k - mF^j + m\Delta_{nk}^j v^n v^k &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.48)$$

Будем считать, что обычная звезда представляет собой жидкую сферу, которая не вращается и не деформируется ($A_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$). Для частицы звёздного вещества, движущейся внутри звезды радиально от центра к поверхности, наблюдаемая скорость равна $v^1 = \frac{dr}{d\tau}$, тогда как $v^2 = v^3 = 0$. В этом случае х.и.-уравнения неизотропных геодезических (4.48) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_1 v^1 &= 0 \\ \frac{d(mv^1)}{d\tau} - mF^1 + m\Delta_{11}^1 v^1 v^1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.49)$$

Они имеют ту же структуру, что и х.и.-уравнения изотропных геодезических (4.29) и решаются одинаковым способом. Но массовые частицы не удовлетворяют условию скорости света $h_{ik} c^i c^k = c^2$ (4.37), которое мы использовали для уравнений изотропных геодезических. Поэтому х.и.-уравнения неизотропных геодезических (4.49) будут иметь другое решение, чем то, которое мы получили для х.и.-уравнений изотропных геодезических (4.29).

Подставим в х.и.-скалярное уравнение геодезических для частицы звёздного вещества (4.49) выражение для F_1 (3.6), которое

мы получили для метрики жидкой сферы. Таким образом, мы получаем это уравнение в виде

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} = -\frac{r_g}{a^3} \frac{r}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} \frac{dr}{d\tau}. \quad (4.50)$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде, который легко проинтегрировать

$$\begin{aligned} d \ln m &= -\frac{d \left| 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}{\left| 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}} \right|} = \\ &= d \ln \frac{1}{\left| 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

При $r_g \leq r \leq a$ (мы изучаем только частицы внутри звезды) после интегрирования получаем

$$m = \frac{B}{3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad B = const. \quad (4.52)$$

Пусть частицы стартуют с гильбертовой поверхности ($r_0 = r_g$) рядом с центром звезды. Тогда

$$B = m_{(0)} \left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g^3}{a^3}} \right), \quad (4.53)$$

где

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{c^2 \left(1-\frac{r_g^3}{a^3}\right)}}} \quad (4.54)$$

— начальное значение релятивистской массы частицы на гильбертовой поверхности звезды. Поскольку $r_g \ll a$ для обычных звёзд, мы пренебрегаем членами высшего порядка в $\frac{r_g}{a}$. С учётом всего

этого решение х.и.-скалярного уравнения геодезических, которое представляет собой (4.52), принимает вид

$$m = \frac{m_{(0)} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1 \right)}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = \frac{m_0 \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1 \right)}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}}, \quad (4.55)$$

где мы имеем

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}} \quad (4.56)$$

в рамках упомянутого выше приближения.

Теперь рассмотрим х.и.-векторное уравнение геодезических из (4.49). При нашем предположении, что частица звёздного вещества движется радиально от центра звезды к её поверхности, это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Delta_{11}^1 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - F^1 = 0. \quad (4.57)$$

С подставленными $\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau}$ (4.30), Δ_{11}^1 (3.8), F^1 (3.7) и с обозначениями $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{d\tau^2}$ и $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$ это уравнение преобразуется в нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно r

$$\ddot{r} - \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} + \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} + \frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = 0. \quad (4.58)$$

Оно идентично уравнению (4.36), полученному нами для фотона, и тоже нерешаемо. Поэтому, очевидно, его надо упростить. Для

упрощения этого уравнения выразим \dot{r}^2 из очевидного соотношения $h_{11}\dot{r} = \dot{r}^2$, которое принимает вид

$$c^2 \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right) \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right) = \dot{r}^2, \quad (4.59)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right)}}}. \quad (4.60)$$

Из (4.55) следует, что

$$\frac{m_0}{m} = \frac{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1}. \quad (4.61)$$

Поэтому из (4.59) получаем

$$\dot{r}^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right) \left[1 - \frac{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right)^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)}{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1\right)^2}\right]. \quad (4.62)$$

Подставляя эту формулу для \dot{r}^2 в исходное дифференциальное уравнение (4.58) и пренебрегая членами высшего порядка от $\frac{r_g}{a}$, мы приводим х.и.-векторное уравнение геодезических (4.58) к следующему виду, в котором оно вполне решается

$$\ddot{r} + \frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g r}{2a^3} = 0. \quad (4.63)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}{2a^3}}. \quad (4.64)$$

Это решение касается частиц звёздного вещества. Как легко видеть, эта формула преобразуется в формулу для частоты колебаний звёздных фотонов Ω (4.39) при предельном условии $\dot{r} = c$.

Х.и.-векторное уравнение геодезических (4.63) решается как

$$r = Q_1 \cos \Omega \tau + Q_2 \sin \Omega \tau, \quad (4.65)$$

где постоянные интегрирования Q_1 и Q_2 получаются из условий $r_0 = r_g$ и $\dot{r}_0 = 0$ в начальный момент времени $\tau_0 = 0$. Мы получаем

$$Q_1 = r_g, \quad Q_2 = \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}}. \quad (4.66)$$

Поэтому окончательное решение для r имеет вид

$$r = r_g \cos \Omega \tau + \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}} \sin \Omega \tau, \quad (4.67)$$

который представляет собой уравнение гармонических колебаний $r = A_1 \cos \Omega \tau + A_2 \sin \Omega \tau$. В итоге, дифференцируя (4.67), мы получаем радиальную скорость частицы звёздного вещества во внутреннем пространстве обычной звезды

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g^3}{2a^3}} \sin \Omega \tau + \dot{r}_0 \cos \Omega \tau. \quad (4.68)$$

Полученное решение (4.67) показывает, что частицы жидкого вещества каждой звезды колеблются с частотой Ω (4.64), которая зависит от массы и радиуса этой конкретной звезды, а также от начальной скорости частиц. Это колебание происходит с двумя амплитудами:

- а) Амплитуда $A_1 = r_g$ такая же, как и у светоподобной звёздной материи (см. §4.2). Это означает, что частицы жидкого вещества каждой звезды колеблются с той же амплитудой, что и светоподобная материя этой конкретной звезды. Эта амплитуда совпадает с радиусом внутреннего пространственного разрыва поля звезды на поверхности её гильбертова ядра, где выделяется звёздная энергия;
- б) Амплитуда

$$A_2 = \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}} \quad (4.69)$$

зависит от начальной скорости \dot{r}_0 частиц звёздного вещества. Если $\dot{r}_0 = c$, то $A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$ совпадает с амплитудой колебания светоподобной звёздной материи (см. §4.2). Согласно (4.69) начальная скорость тех частиц, амплитуда колебания которых достигает поверхности звезды ($A_2 = a$), равна

$$\dot{r}_0 = \frac{c \sqrt{r_g}}{\sqrt{2a - r_g}} = \frac{v_{II}}{\sqrt{2 - \frac{r_g}{a}}} \approx \frac{v_{II}}{\sqrt{2}}, \quad v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{a}}, \quad (4.70)$$

где v_{II} (4.21) вторая космическая скорость для звезды, с которой частицы, что рядом со звездой, навсегда покидают её гравитационное поле. Таким образом, по условию $A_2 \geq a$ в (4.69) мы получаем скорость \dot{r}_0 , которая необходима частице звёздного вещества, чтобы навсегда улететь с поверхности звезды в космос. Она отличается от второй космической скорости v_{II} для частицы, не связанной с веществом звезды

$$\dot{r}_0 \geq \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (4.71)$$

Выразим формулу для собственной частоты звезды Ω (4.64) через орбитальную скорость v_1 частицы звёздного вещества

$$\Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{2a}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} = \frac{v_{II}}{a \sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} = \frac{v_1}{a} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}. \quad (4.72)$$

Используя эту формулу, мы выражаем r (4.67) в виде

$$r = r_g \cos \Omega \tau + \frac{\dot{r}_0 a}{v_1 \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}} \sin \Omega \tau, \quad (4.73)$$

т.е. в виде $r = A_1 \cos \Omega \tau + A_2 \sin \Omega \tau$. Итак, мы имеем

$$A_1 = r_g, \quad A_2 = \frac{\dot{r}_0 a}{v_1 \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}}. \quad (4.74)$$

Таким образом, \dot{r} (4.68) превращается в

$$\dot{r} = -\frac{r_g v_1}{a} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} \sin \Omega \tau + \dot{r}_0 \cos \Omega \tau. \quad (4.75)$$

Рассмотрим теперь амплитуду A_2 (4.74) для некоторых частных случаев, когда она имеет разные численные значения:

1. Если $\dot{r}_0 = 0$, мы имеем $A_2 = 0$ согласно определению A_2 (4.74). Следовательно, частицы звёздного вещества колеблются с амплитудой r_g . Другими словами, если $\dot{r}_0 = 0$, частицы не могут достигнуть поверхности звезды и, следовательно, покинуть звезду;
2. Если $\dot{r}_0 = v_I$, частицы также не могут покинуть звезду. Это потому, что они колеблются с амплитудой также меньше физического радиуса звезды

$$A_2 = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{v_I^2}{c^2}}} < a; \quad (4.76)$$

3. Если $\dot{r}_0 = v_{II}$, то частицы покидают звезду. Это потому, что в случае $\dot{r}_0 = v_{II}$ мы имеем

$$A_2 = \frac{a \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{v_{II}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_{II}^2}{2c^2}\right) a \sqrt{2} \approx a \sqrt{2} > a; \quad (4.77)$$

4. Если $A_2 = a$, то амплитуда равна физическому радиусу звезды. Тогда из определения A_2 (4.74) получаем, что

$$\dot{r}_0 = \frac{v_I}{\sqrt{1 + \frac{v_I^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_I^2}{2c^2}\right) v_I < v_I, \quad (4.78)$$

т.е. частицы движутся немного медленнее, чем орбитальная скорость звезды. Это означает, что если амплитуда равна физическому радиусу звезды ($A_2 = a$), то частицы могут выпрыгивать с поверхности звезды, но при этом не выходить на её орбиту (они будут всегда падать обратно на звезду).

Таким образом, новая математическая теория жидких звёзд даёт прочное теоретическое обоснование звёздного ветра, испускаемого звездой, как ветра, состоящего из двух компонент. Одна из этих компонент немного медленнее, чем орбитальная скорость звезды, а другая — быстрее второй космической скорости. Этот вывод соответствует данным наблюдений. Так, например, солнечный ветер состоит из двух компонент. Медленный солнечный ветер

распространяется со скоростью около 400 км/сек, что меньше орбитальной скорости Солнца, равной $v_1 = 440$ км/сек. Быстрый солнечный ветер распространяется со скоростью около 750 км/сек, что превышает вторую космическую скорость Солнца $v_{II} = 617$ км/сек.

4.4 Заключение

Подытожим основные выводы, которые мы получили о происхождении звёздного ветра. Выводы следующие:

1. Светоподобная материя каждой звезды колеблется с определённой частотой

$$\Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}} = \frac{v_{II}}{a} = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}, \quad (4.79)$$

характеризующей эту конкретную звезду. Это означает, что каждая звезда имеет свою характерную частоту Ω в соответствии с её массой M и радиусом a . Поэтому мы называем её *собственной частотой* звезды;

2. Это колебание происходит с двумя амплитудами. Амплитуда $A_1 = r_g$ совпадает с радиусом гильбертова ядра звезды, на поверхности которого выделяется звёздная энергия. Другая амплитуда $A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$ совпадает с радиусом пространственного разрыва в поле звезды, находящегося во внешнем космосе. Для Солнца $A_2 = 3,4 \times 10^{13}$ см = 2,3 а.е. совпадает с максимальной концентрацией астероидов в поясе астероидов;
3. Это — общее колебание всего светоподобного вещества звезды. Оно происходит из-за наличия у звезды гравитационного поля, источником которого является её масса M . Другими словами, это колебание — собственное “дыхание” звезды;
4. Частицы жидкого вещества каждой звезды колеблются с двумя амплитудами на определённой частоте

$$\Omega = \sqrt{\frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}{2a^3}} = \frac{v_{II}}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} = \frac{v_1}{c} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}, \quad (4.80)$$

которая определяется массой и радиусом этой конкретной звезды, а также зависит от начальной скорости \dot{r}_0 этих частиц. Эта частота может быть выражена через вторую косми-

ческую скорость v_{II} и орбитальную скорость v_I , рассчитанные для звезды;

5. Амплитуда их колебаний $A_1 = r_g$ такая же, как и у светоподобного вещества (фотонов) звезды. Другая амплитуда A_2 зависит от начальной скорости частиц

$$A_2 = \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}} = \frac{\dot{r}_0 a}{v_I \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}}; \quad (4.81)$$

6. Звёзды излучают свет (поток фотонов) и извергают потоки частиц звёздного вещества (звёздный ветер) не в силу особых физических условий, а автоматически. Трёхмерное уравнение движения частиц (как фотонов, так и частиц звёздного вещества), движущихся радиально от центра жидкой звезды к её поверхности, представляет собой уравнение гармонических свободных колебаний

$$\ddot{r} + \Omega^2 r = 0, \quad \Omega^2 = -\frac{2F_1}{r} = \frac{c^2 r_g}{a^3}, \quad (4.82)$$

где $F_1 = -\frac{c^2 r_g r}{2a^3}$ есть линеаризованная форма (в смысле $r_g \ll a$) силы гравитации, действующей внутри любой жидкой звезды. Это — ньютоновская гравитационная сила, пропорциональная расстоянию, которая является причиной упомянутых общих колебаний как светоподобной звёздной материи, так и звёздного вещества. Как только амплитуда колебаний превышает физический радиус звезды, частицы вылетают из звезды в космос. Следовательно, причиной как излучения звёзд, так и звёздного ветра является внутреннее строение тел звёзд, представляющих собой жидкие сферы в состоянии невесомости в космосе;

7. Согласно этой теории, звёздный ветер, испускаемый любой звездой, состоит из двух компонент: медленного звёздного ветра и быстрого звёздного ветра. Частицы, амплитуда колебаний которых достигает поверхности звезды ($A_2 = a$), имеют начальную скорость

$$\dot{r}_0 = \frac{v_I}{\sqrt{1 + \frac{v_I^2}{c^2}}} \simeq \left(1 - \frac{v_I^2}{2c^2}\right) v_I < v_I, \quad (4.83)$$

которая не превышает орбитальной скорости звезды v_1 . Частицы, скорость которых равна второй космической скорости звезды ($\dot{r}_0 = v_{II}$), имеют амплитуду колебаний

$$A_2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{v_{II}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_{II}^2}{2c^2}\right) a\sqrt{2} \approx a\sqrt{2} > a. \quad (4.84)$$

Это означает, что медленный звёздный ветер состоит из частиц, амплитуда колебаний которых находится в диапазоне $a \leq A_2 < a\sqrt{2}$. Эти частицы покидают поверхность звезды, но не навсегда. Они всегда падают обратно на звезду. Быстрый звёздный ветер состоит из частиц, амплитуда колебаний которых равна $A_2 \geq a\sqrt{2}$. Они навсегда покидают гравитационное поле звезды во внешний космос. Этот теоретический результат согласуется с данными наблюдений: солнечный ветер делится на медленный солнечный ветер, движущийся со скоростью ~ 400 км/сек (медленнее, чем $v_{1\odot} = 440$ км/сек) и быстрый солнечный ветер, движущийся со скоростью ~ 750 км/сек (быстрее, чем $v_{II\odot} = 617$ км/сек).

5.1 Введение метрики пространства вращающейся нейтронной звезды

Эта глава — самая короткая и самая сложная в математическом отношении среди других глав этой книги. Мы применим нашу модель жидких звёзд к нейтронным звёздам и пульсарам. Высокий уровень сложности связан с тем, что, как только мы вводим в метрику пространства вращение даже вокруг одной координатной оси, дальнейшие вычисления становятся весьма проблематичными. Так или иначе, давайте начнём.

Нейтронные звёзды и пульсары относятся к типу II по нашей классификации звёзд согласно общей теории относительности (см. таблицу 1.1 в §1.2). Это означает, что физический радиус a такой звезды немного больше её гильбертова радиуса r_g : звезда почти коллапсар, но всё же имеет возможность светиться как обычная звезда. В §1.2 мы показали, что метрика пространства жидкой сферы преобразуется в метрику вакуумной сферы де Ситтера при условии гравитационного коллапса ($a = r_g$, т.е. жидкая сфера в состоянии коллапса). Эта метрика имеет вид (1.16)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.1)$$

Физические параметры нейтронных звёзд и пульсаров близки к параметрам коллапсаров, но не совпадают (см. таблицу 1.1). Поэтому метрика (5.1), включающая условие коллапса, близка к метрике нейтронной звезды или пульсара, но не является таковой.

Как модифицировать метрику пространства коллапсара (5.1), чтобы получить метрику нейтронной звезды или пульсара? Выйти

из состояния коллапса, но в то же время оказаться рядом с ним. Легко.

Напомним, частное условие гравитационного коллапса ($g_{00} = 0$) вытекает из общего условия гравитационного коллапса, согласно которому физическое наблюдаемое время τ (1.30) останавливается на поверхности объекта

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = 0. \quad (5.2)$$

Если пространство объекта не вращается (все $g_{0i} = 0$), возникает упомянутое выше частное условие коллапса ($g_{00} = 0$).

Как только объект вращается (хотя бы одна из всех трёх величин g_{0i} отлична от нуля), условие $g_{00} = 0$ может оставаться верным на поверхности объекта, но не означает гравитационный коллапс. Это связано со вторым членом условия полного коллапса (5.2), который в данном случае не равен нулю. Поэтому, как только вращение введено в метрику (5.1), метрика описывает сферу, находящуюся вне состояния гравитационного коллапса. Чем быстрее вращается сфера, тем больше её состояние отличается от состояния сколлапсировавшей сферы.

Если мы добавим вращение к метрике сколлапсировавшей жидкой сферы, а также найдём уравнения поля Эйнштейна в форме, содержащей сильное магнитное поле и в то же время удовлетворяющей этой метрике, мы получим полное описание вращающейся нейтронной звезды или пульсара. Это — наш план исследования для данной главы.

Во-первых, мы добавляем пространственное вращение к метрике (5.1) в соответствии с теорией хронометрических инвариантов: см. формулы (1.45) из §1.3. Предположим, что объект — жидкая сфера радиуса a — вращается с угловой скоростью ω вдоль своей экваториальной оси (оси ϕ в сферических координатах r, θ, ϕ). В этом случае исходная метрика сколлапсировавшей жидкой сферы (5.1) принимает следующий вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{2\omega r^2 \cos \theta}{c} c dt d\phi - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.3)$$

что означает, что данная сфера не является коллапсаром из-за её вращения.

Линейная скорость такого вращения определяется g_{0i} метрики по общей формуле (1.45). В данном случае,

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = -\frac{2\omega ar^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (5.4)$$

Предельная скорость вращения нейтронных звёзд, согласно астрономическим наблюдениям, составляет примерно 1000 км/сек. Поэтому мы пренебрегаем членами $\frac{v^2}{c^2}$, где $v^2 = h^{ik} v_i v_k \ll c^2$.

Трёхмерный наблюдаемый х.и.-метрический тензор h_{ik} (1.34) пространства с метрикой (5.3) имеет компоненты

$$h_{11} = \frac{1}{h^{11}} = \frac{a^2}{a^2 - r^2}, \quad h_{22} = \frac{1}{h^{22}} = r^2, \quad h_{33} = \frac{1}{h^{33}} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (5.5)$$

а детерминант х.и.-метрического тензора h_{ik} и ненулевые производные его логарифма по пространственным координатам

$$h = \det \|h_{ik}\| = \frac{a^2 r^4 \sin^2 \theta}{a^2 - r^2}, \quad (5.6)$$

$$\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} = \frac{2a^2 - r^2}{r(a^2 - r^2)}, \quad (5.7)$$

$$\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} = \cot \theta. \quad (5.8)$$

Также в силу принятого условия $v^2 \ll c^2$ (нерелятивистского вращения объекта) х.и.-дифференциальный оператор по пространственным координатам (1.41) совпадает с обычным дифференциальным оператором.

Используя g_{00} и g_{0i} метрики (5.3), мы теперь выводим формулы для х.и.-вектора гравитационно-инерциальной силы F_i , действующей в пространстве, а также для х.и.-тензора вращения пространства A_{ik} . Согласно определениям этих величин в хронометрически инвариантном формализме (см. §1.3), получаем

$$F_1 = \frac{c^2 r}{a^2 - r^2}, \quad F^1 = \frac{c^2 r}{a^2}, \quad (5.9)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} A_{13} &= -\frac{2\omega a^3 r \cos \theta}{(a^2 - r^2)^{3/2}}, & A^{13} &= -\frac{2\omega a \cos \theta}{r \sqrt{a^2 - r^2} \sin^2 \theta} \\ A_{23} &= \frac{\omega a r^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}, & A^{23} &= \frac{\omega a}{r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \sin \theta} \end{aligned} \right\}. \quad (5.10)$$

Далее, согласно метрике (5.3), мы получаем ненулевые компоненты х.и.-символов Кристоффеля Δ_{kn}^i , х.и.-тензора кривизны C_{iklj} и х.и.-аналога тензора Риччи $C_{ik} = h^{mn} C_{imkn}$

$$\Delta_{11}^1 = \frac{r}{a^2 - r^2}, \quad \Delta_{22}^1 = -\frac{r(a^2 - r^2)}{a^2}, \quad (5.11)$$

$$\Delta_{33}^1 = -\frac{r(a^2 - r^2)}{a^2} \sin^2 \theta, \quad \Delta_{12}^2 = \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (5.12)$$

$$\Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta, \quad (5.13)$$

$$C_{1212} = -\frac{r^2}{a^2 - r^2}, \quad (5.14)$$

$$C_{1313} = -\frac{r^2}{a^2 - r^2} \sin^2 \theta, \quad (5.15)$$

$$C_{2323} = -\frac{r^4}{a^2} \sin^2 \theta, \quad (5.16)$$

$$C_{11} = -\frac{2}{a^2 - r^2}, \quad C_{22} = -\frac{2r^2}{a^2}, \quad C_{33} = -\frac{2r^2}{a^2} \sin^2 \theta. \quad (5.17)$$

Используя эти характеристики пространства метрики (5.3) мы выведем уравнения поля Эйнштейна в виде, удовлетворяющем этой метрике. Это — следующий шаг в наших исследованиях нейтронных звёзд и пульсаров.

5.2 Уравнения Эйнштейна и уравнения закона сохранения, удовлетворяющие этой метрике

Рассмотрим х.и.-уравнения поля Эйнштейна в их общем виде (1.92–1.94). В стационарном пространстве (т.е. когда пространство не деформируется), таком как пространство метрики (5.3), которую

мы предлагаем для нейтронных звёзд и пульсаров, х.и.-уравнения Эйнштейна принимают упрощённую форму

$$A_{;j} A^{;j} + \left({}^* \nabla_j - \frac{1}{c^2} F_j \right) F^j = -\frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 + U) + \lambda c^2, \quad (5.18)$$

$$\frac{2}{c^2} F_j A^{;j} - {}^* \nabla_j A^{;j} = \varkappa J^i, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} 2A_{ij} A_k^{;j} + \frac{1}{2} ({}^* \nabla_i F_k + {}^* \nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ = \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}) + \lambda c^2 h_{ik}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Правые части этих уравнений содержат х.и.-проекции (1.91) тензора энергии-импульса материи, заполняющей пространство: наблюдаемую плотность массы ρ , наблюдаемую плотность импульса J^i и наблюдаемый тензор напряжений U^{ik} , тогда как $U = h^{ik} U_{ik}$ след наблюдаемого тензора напряжений. Обратите внимание, что тензор энергии-импульса здесь имеет произвольную форму. Это означает, что вид распределённой материи пока не уточняется.

Подставим полученные х.и.-характеристики метрики (5.3) в эти уравнения. В результате мы преобразуем х.и.-уравнения Эйнштейна (5.18–5.20) к следующему виду

$$\frac{8\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{2\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} = \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 + U), \quad (5.21)$$

$$\frac{2\omega a \cot \theta}{r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \sin \theta} = -\varkappa J^3, \quad (5.22)$$

$$\frac{8\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 - U) = \frac{\varkappa U_{11} (a^2 - r^2)}{a^2}, \quad (5.23)$$

$$\frac{4\omega^2 a^4 r \cot \theta}{(a^2 - r^2)^2} = -\varkappa U_{12}, \quad (5.24)$$

$$\frac{2\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} - \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 - U) = \frac{\varkappa U_{22}}{r^2}, \quad (5.25)$$

$$\frac{2\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} + \frac{8\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 - U) = \frac{\varkappa U_{33}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (5.26)$$

При этом следует учитывать, что исходная метрика (5.1) невращающегося пространства была выведена при очевидных физических условиях $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$ и $\lambda > 0$. При этом мы получили, что пространство внутри такой сферы однородно заполнено идеальной жидкостью, состояние которой близко к состоянию физического вакуума (λ -поля) высокой плотности. Подробнее см. §1.2.

Учитывая, что $U = h^{ik}U_{ik} = h^{11}U_{11} + h^{22}U_{22} + h^{33}U_{33}$, мы, на основе трёх соответствующих тензорных уравнений, получаем соотношение, связывающее величины ρ и U

$$\frac{16\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{4\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} = \frac{\kappa}{2} (3\rho c^2 - U). \quad (5.27)$$

Суммируя (5.21) и (5.27), мы получаем формулу для плотности распределённой материи, заполняющей пространство внутри вращающейся нейтронной звезды или пульсара

$$\frac{12\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{3\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} = \kappa \rho c^2. \quad (5.28)$$

Умножая (5.21) на 3, затем вычитая (5.27) из полученного произведения, получаем формулу для U

$$\frac{4\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} = \kappa U. \quad (5.29)$$

Сравнивая полученные формулы (5.28) и (5.29), мы видим, что ρ и U распределённой материи, заполняющей пространство метрики (5.3) внутри вращающейся нейтронной звезды или пульсара, связаны между собой отношением

$$U = \frac{1}{3} \rho c^2. \quad (5.30)$$

Наконец, преобразуем тензорные уравнения из х.и.-уравнений Эйнштейна (5.21–5.26) так, чтобы они выражали ненулевые контравариантные компоненты тензора напряжений: $U^{11} = h^{1m}h^{1n}U_{mn}$, $U^{12} = h^{1m}h^{2n}U_{mn}$, $U^{22} = h^{2m}h^{2n}U_{mn}$, $U^{33} = h^{3m}h^{3n}U_{mn}$. Принимая во внимание полученное соотношение $U = \frac{1}{3}\rho c^2$ (5.30), а также полученную формулу для ρ (5.28), мы преобразуем х.и.-тензорные

уравнения Эйнштейна (5.23–5.26) к виду

$$\kappa U^{11} = \frac{8\omega^2 a^2 \cot^2 \theta}{a^2 - r^2} - \frac{\kappa \rho c^2 (a^2 - r^2)}{3a^2}, \quad (5.31)$$

$$\kappa U^{12} = -\frac{4\omega^2 a^2 \cot \theta}{r(a^2 - r^2)}, \quad (5.32)$$

$$\kappa U^{22} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{2\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} - \frac{\kappa \rho c^2}{3} \right), \quad (5.33)$$

$$\kappa U^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{2\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} + \frac{8\omega^2 a^4}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{\kappa \rho c^2}{3} \right]. \quad (5.34)$$

Теперь нам следует проверить, удовлетворяют ли полученные х.и.-уравнения Эйнштейна (т.е. заданный конкретный тип распределённой материи) метрике (5.3) или нет. Как это сделать? Члены, составляющие уравнения поля Эйнштейна, бывают двух видов: характеристики конкретного пространства и характеристики заполняющей его материи (последние являются х.и.-компонентами тензора энергии-импульса материи). Предположим, что мы получили другим путём компоненты тензора энергии-импульса данной материи, выраженные через характеристики данного пространства. Тогда, подставляя их в полученные уравнения Эйнштейна, мы увидим: если уравнения становятся тождествами, то они удовлетворяют данному пространству; а если нет, то не удовлетворяют.

Чтобы выяснить, как ρ , J^i и U^{ik} полученных х.и.-уравнений Эйнштейна выражаются через характеристики пространства, рассмотрим х.и.-уравнения закона сохранения (1.96–1.97). Они представляют собой х.и.-запись закона сохранения $\nabla_\sigma T^{\alpha\sigma} = 0$ для тензора энергии-импульса распределённой материи.

В недеформирующемся пространстве, таком как пространство метрики (5.3), что мы предложили для нейтронных звёзд и пульсаров, х.и.-уравнения закона сохранения (1.96–1.97) имеют вид

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} + * \tilde{\nabla}_i J^i - \frac{1}{c^2} F_i J^i = 0, \quad (5.35)$$

$$\frac{* \partial J^k}{\partial t} + 2A_i^{\cdot k} J^i + * \tilde{\nabla}_i U^{ik} - \rho F^k = 0, \quad (5.36)$$

где ${}^*\widetilde{\nabla}_i = {}^*\nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$. Согласно полученным нами х.и.-уравнениям Эйнштейна, только одна компонента $J^3 \neq 0$ из всех трёх компонент наблюдаемой плотности импульса J^i во вращающейся жидкой сфере не равна нулю. Также, как было показано в §4.2, в этом случае только $F_1 \neq 0$. Поэтому касательно х.и.-скалярного уравнения закона сохранения (5.35) мы имеем

$$\begin{aligned} {}^*\widetilde{\nabla}_i J^i - \frac{1}{c^2} F_i J^i &= {}^*\widetilde{\nabla}_3 J^3 - \frac{1}{c^2} F_3 J^3 = \\ &= \left(\frac{\partial J^3}{\partial \phi} + J^3 \Delta_{j3}^j - \frac{1}{c^2} F_3 J^3 \right) - \frac{1}{c^2} F_3 J^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

В результате х.и.-скалярное уравнение закона сохранения (5.35) преобразуется в простое очевидное условие

$$\frac{{}^*\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5.38)$$

означающее, что наблюдаемая плотность материи (жидкого вещества и полей), заполняющей эту сферу, является стационарной.

Из трёх х.и.-векторных уравнений закона сохранения (5.36) уравнение с индексом $k = 3$ обращается в нуль. Остальные два векторных уравнения (при $k = 1, 2$) принимают вид, соответственно

$$\begin{aligned} \frac{2A_{31}(a^2 - r^2)}{a^2} J^3 + \frac{\partial U^{11}}{\partial r} + \frac{\partial U^{12}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} \right) U^{12} + \\ + \Delta_{22}^1 U^{22} + \Delta_{33}^1 U^{33} + \left(\Delta_{11}^1 + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} - \frac{1}{c^2} F_1 \right) U^{11} = \rho F^1, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{2A_{32}}{r^2} J^3 + \frac{\partial U^{12}}{\partial r} + \frac{\partial U^{22}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} \right) U^{22} + \\ + \Delta_{33}^2 U^{33} + \left(2\Delta_{12}^2 + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} - \frac{1}{c^2} F_1 \right) U^{12} = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Применим характеристики пространства вращающейся жидкой сферы и характеристики наполняющей его материи. Формулы для U^{ik} (5.31–5.34) и формула для J^3 (5.22) вытекают из х.и.-уравнений Эйнштейна. Формулы для производных логарифма имеют вид (5.7, 5.8). Полученная формула для ρ имеет вид (5.28). Формула для действующей гравитационно-инерциальной силы F_1 имеет вид (5.9), а

формулы для ненулевых компонент A_{13}, A_{23} тензора вращения пространства имеют вид (5.10). Подставляя все эти формулы в оставшиеся уравнения закона сохранения (5.39, 5.40), после некоторых преобразований мы видим, что эти уравнения также вымываются.

Итак, совместное решение уравнений поля Эйнштейна и уравнений закона сохранения в пространстве вращающейся жидкой сферы показало, что предложенные уравнения справедливы в этом пространстве. Другими словами, метрика пространства (5.3), предложенная нами для нейтронных звёзд или пульсаров, удовлетворяет уравнениям поля Эйнштейна (и наоборот).

5.3 Введение электромагнитного поля

Как известно, каждая вращающаяся нейтронная звезда или пульсар имеет сильное магнитное поле. Поэтому мы переходим к следующему этапу данного исследования. Нам необходимо ввести такой тензор энергии-импульса, который описывает электромагнитное поле и удовлетворяет соотношению $U = \frac{1}{3} \rho c^2$ (5.30), вытекающему из полученных х.и.-уравнений Эйнштейна. Как только будет получен тензор энергии-импульса, можно будет вывести уравнения электромагнитного поля. Затем мы сделаем вывод о том, как распределяется электромагнитное поле внутри вращающейся нейтронной звезды или пульсара согласно нашей теории. Таков наш план на данный момент.

Тензор энергии-импульса произвольного электромагнитного поля имеет следующий общий вид

$$T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2} \left(-F^{\alpha}_{\cdot\sigma} F^{\beta\sigma} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma} \right), \quad (5.41)$$

где $F_{\alpha\beta}$ тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла). Это — ротор четырёхмерного электромагнитного потенциала A^α

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (5.42)$$

Физически наблюдаемыми х.и.-проекциями вектора A^α являются скалярный потенциал φ и векторный потенциал q^i электромагнитного поля

$$\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad q^i = A^i. \quad (5.43)$$

Теория электромагнитного поля, выраженная в терминах хронометрически инвариантного формализма, хорошо развита в нашей книге [18]; см. главу 3 там же. Мы отсылаем всех, кому интересны подробности, к этой книге.

Физические наблюдаемые х.и.-проекции тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ (5.42) имеют вид

$$\rho_{\text{em}} = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \frac{E_i E^i + H_{*i} H^{*i}}{8\pi c^2}, \quad (5.44)$$

$$J_{\text{em}}^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon^{ikm} E_k H_{*m}, \quad (5.45)$$

$$U_{\text{em}}^{ik} = c^2 T^{ik} = \rho_{\text{em}} c^2 h^{ik} - \frac{1}{4\pi} (E^i E^k + H^{*i} H^{*k}). \quad (5.46)$$

Здесь E^i и H^{*i} , соответственно, трёхмерные х.и.-вектор и х.и.-псевдовектор электрической и магнитной напряжённостей поля, тогда как ε^{imn} есть полностью антисимметричный единичный трёхмерный х.и.-псевдотензор. Они выражаются как [18]

$$\left. \begin{aligned} E^{*ik} &= -\varepsilon^{ikn} E_n, & E_n &= \frac{* \partial \varphi}{\partial x^n} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_n}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_n \\ H^{*i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}, & H_{mn} &= \frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \end{aligned} \right\}. \quad (5.47)$$

Мы видим, что наблюдаемые электрическая и магнитная напряжённости зависят не только от самого электромагнитного поля (скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля), но и от действующей гравитационно-инерциальной силы F_i и вращения пространства A_{ik} .

Пульсары — массивные объекты, обладающие сильным электромагнитным полем и быстрым вращением. Поэтому F_i и A_{ik} являются значимыми в нашем исследовании. Мы, однако, пренебрежём временными вариациями и пространственной неоднородностью электромагнитных потенциалов, принимая условия (3.106)

$$\left. \begin{aligned} \frac{* \partial \varphi}{\partial t} &= 0, & \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{* \partial q_i}{\partial t} &= 0, & q_{ik} &= \frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5.48)$$

т.е. мы полагаем электромагнитное поле стационарным и безвихревым. При этих условиях электрическая и магнитная напряжённости поля принимают вид

$$\left. \begin{aligned} E^i &= -\frac{\varphi}{c^2} F^i, & E_i &= -\frac{\varphi}{c^2} F_i \\ H^{*i} &= -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}, & H_{mn} &= -\frac{2\varphi}{c} A_{mn} \end{aligned} \right\}, \quad (5.49)$$

где Ω^{*i} трёхмерный х.и.-псевдовектор угловой скорости, с которой вращается звезда

$$\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}, \quad \Omega_{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} A^{mn}. \quad (5.50)$$

Х.и.-тензор угловой скорости вращения пространства A_{ik} определяется метрикой конкретного вращающегося пространства. Его компоненты, рассчитанные для метрики вращающейся нейтронной звезды или пульсара, представлены в формуле (5.10).

Примечание. Формулы для электрической и магнитного напряжённости поля, которые мы предлагаем для нейтронных звёзд и пульсаров, показывают, что электромагнитное поле такой звезды обусловлено её гравитацией и вращением. А именно — даже если в звезде присутствует потенциал электромагнитного поля φ , электрическая напряжённость поля E^i проявляется только за счёт гравитационного поля звезды, а магнитная напряжённость H^{*i} проявляется только при вращении звезды.

Используя эти формулы для E^i и H^{*i} (5.49), а также все вышеупомянутые предположения и выводы, которые мы сделали для нейтронных звёзд и пульсаров, мы преобразуем физические наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ (5.44–5.45) к следующему виду

$$\rho_{\text{em}} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right), \quad (5.51)$$

$$J_{\text{em}}^i = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \varepsilon^{ikm} F_k \Omega_{*m}, \quad (5.52)$$

$$U_{\text{em}}^{ik} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) h^{ik} - \frac{\varphi^2}{\pi c^2} \left(\frac{F^i F^k}{4c^2} + \Omega^{*i} \Omega^{*k} \right), \quad (5.53)$$

который соответствует безвихревому электромагнитному полю. Из первого и последнего уравнений мы получаем формулу, связывающую ρ_{em} и $U_{\text{em}} = h_{ik} U_{\text{em}}^{ik}$ в электромагнитном поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара

$$U_{\text{em}} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) = \rho_{\text{em}} c^2. \quad (5.54)$$

Как видно из этой формулы (5.54), в рамках принятых условий конкретного электромагнитного поля мы имеем $U = \rho c^2$. Но, как мы получили ранее согласно метрике пространства вращающейся нейтронной звезды или пульсара, должно быть $U = \frac{1}{3} \rho c^2$ (5.30). Другими словами, согласно метрике мы должны иметь

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{em}} c^2, \quad (5.55)$$

где

$$U_{\text{em}} = \frac{\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\varkappa}, \quad \rho_{\text{em}} = \frac{3\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\varkappa c^2}. \quad (5.56)$$

Поэтому наша задача сейчас состоит в том, чтобы найти такое физическое условие, при котором электромагнитное поле удовлетворяет (5.56), а значит, и (5.55).

Найдём это условие. Используя полученное нами соотношение $U_{\text{em}} = \rho_{\text{em}} c^2$ (5.54), перепишем формулу $U_{\text{em}} = \frac{1}{\varkappa} \Omega_{*j} \Omega^{*j}$ (5.56) как

$$\frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) = \frac{\Omega_{*j} \Omega^{*j}}{\varkappa}, \quad (5.57)$$

или, поскольку $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, в эквивалентной записи

$$c^2 \Omega_{*j} \Omega^{*j} = \frac{\frac{G\varphi^2}{c^4}}{1 - \frac{4G\varphi^2}{c^4}} F_j F^j. \quad (5.58)$$

Обратите внимание, что величина $\frac{G\varphi^2}{c^4}$ безразмерна. Скалярный электромагнитный потенциал постоянен $\varphi = \text{const}$ согласно нашим первоначальным предположениям. Следовательно, и поскольку магнитная напряжённость равна $H^{*i} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}$ (5.49), мы получаем, что стационарно вращающаяся звезда является *постоянным магнитом*.

Обозначим

$$\frac{G\varphi^2}{c^4} = n, \quad (5.59)$$

где $n < \frac{1}{4}$, тогда как c и G фундаментальные константы. Следовательно, скалярный электромагнитный потенциал равен

$$\varphi = \frac{c^2}{2\sqrt{G}} < 1,74 \times 10^{24} \text{ грамм}^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ сек}^{-1}. \quad (5.60)$$

При скалярном электромагнитном потенциале φ в пределах этой шкалы величин, электромагнитное поле удовлетворяет метрике пространства вращающейся нейтронной звезды или пульсара.

В результате перепишем полученную формулу (5.58) в виде

$$c^2 \Omega_{*j} \Omega^{*j} = \frac{n}{1-4n} F_i F^i, \quad n < \frac{1}{4}. \quad (5.61)$$

При этом конкретном условии, связывающем действующую силу гравитации и угловую скорость вращения пространства, электромагнитное поле удовлетворяет метрике пространства и уравнениям поля Эйнштейна, которые мы предложили для нейтронных звёзд или пульсаров.

5.4 Распределение магнитного поля пульсара

Чтобы найти, как распределяется магнитная напряжённость по поверхности вращающейся нейтронной звезды или пульсара, рассмотрим уравнения Максвелла. Общековариантная запись обеих групп уравнений Максвелла такова

$$\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \nabla_\sigma F^{*\mu\sigma} = 0, \quad (5.62)$$

где $F^{*\mu\sigma} = \varepsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ псевдотензор, дуальный электромагнитному тензору поля $F_{\alpha\beta}$, тогда как j^μ четырёхмерный вектор тока.

Эта формулировка уравнений Максвелла подразумевает произвольное электромагнитное поле. Преобразуем её с учётом наших предположений, касающихся нейтронных звёзд и пульсаров. Как и ранее, мы пренебрегаем временными вариациями и пространственной неоднородностью электромагнитных потенциалов, принимая условия (5.48).

Поскольку мы рассматриваем электромагнитное поле звезды на её поверхности, четырёхмерный вектор тока равен нулю: $j^\mu = 0$. Это означает, что электромагнитное поле на поверхности звезды не содержит источников, таких как электрические заряды и токи (они остаются внутри звезды).

В этом случае уравнения Максвелла (5.62) принимают вид

$$\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = 0, \quad \nabla_\sigma F^{*\mu\sigma} = 0. \quad (5.63)$$

Запишем уравнения Максвелла (5.63) в соответствии с хронометрически инвариантным формализмом. Х.и.-уравнения Максвелла в этом случае (для поля без источников) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E^i}{\partial t} + D E^i \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (5.64)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II}, \quad (5.65)$$

см. главу 3 книги [18]. Здесь $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikn} E_k$ псевдотензор, дуальный вектору электрической напряжённости E_i , $H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}$ псевдовектор, дуальный тензору магнитной напряжённости H_{mn} , тогда как $D = h^{ik} D_{ik}$ скорость деформации пространства. Так как рассматриваемое пространство вращающейся жидкой сферы не деформируется, а также, согласно нашим первоначальным предположениям, электрическая и магнитная напряжённости стационарны, х.и.-уравнения Максвелла принимают упрощённый вид

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (5.66)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II}. \quad (5.67)$$

Подставим в х.и.-уравнения Максвелла (5.66, 5.67), которые уже адаптированы к метрике пространства вращающейся нейтронной звезды или пульсара, соответствующие формулы для E^i и H^{ik} (5.49) и для их дуальных псевдотензоров (5.47), а также соответствующие характеристики пространства, полученные нами в §5.1.

В результате, после вычислений мы видим, что первое (скалярное) уравнение группы I (5.66) принимает вид

$$\frac{c^2}{a^2} \frac{3a^2 - 2r^2}{a^2 - r^2} = 4\Omega_{*j} \Omega^{*j}, \quad (5.68)$$

два векторных уравнения группы I обращаются в нуль, а третье векторное уравнение принимает вид

$$\frac{2\omega a^3}{r^3 (a^2 - r^2) \sqrt{a^2 - r^2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta} = 0, \quad (5.69)$$

где ω , согласно метрике пространства звезды (5.3), есть угловая скорость вращения звезды вдоль экваториальной оси ϕ . И скалярное, и векторное уравнения группы II (5.67) вымываются. Поэтому сухой остаток, который мы имеем из х.и.-уравнений Максвелла, адаптированных к нейтронным звёздам и пульсарам, — это только уравнения (5.68) и (5.69).

Из-за очевидного предположения, что звёзды не являются точечными объектами (так как $a > 0$) и что радиальная координата положительна ($r > 0$), мы приходим к единственно верному решению уравнения (5.69)

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (5.70)$$

Это означает, что единственное ненулевое векторное уравнение группы I х.и.-уравнений Максвелла имеет решение только на полюсах вращающейся нейтронной звезды или пульсара.

Вообще говоря, векторное уравнение группы I определяет х.и.-функцию ${}^* \nabla_k H^{ik}$, физический смысл которой — наблюдаемое трёхмерное распределение магнитной напряжённости H^{ik} в электромагнитном поле звезды. Следовательно, полученное нами решение (5.70) этого уравнения означает, что магнитное поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара проявляется только на Южном и Северном полюсах звезды.

Рассчитаем магнитную напряжённость $H^{*i} = -\frac{2\varphi}{c}\Omega^{*i}$ (5.49) для этого случая. Компоненты единичного антисимметричного х.и.-псевдотензора ε^{ikm} подробно объясняются в главе 2 книги [18]. Таким образом, после вычислений мы получаем компоненты х.и.-псевдовектора угловой скорости Ω^{*i} (4.34) звезды

$$\Omega^{*1} = \frac{A_{23}}{\sqrt{h}} = \omega, \quad \Omega_{*1} = A^{23}\sqrt{h} = \frac{\omega a^2}{a^2 - r^2}, \quad (5.71)$$

$$\Omega^{*2} = \frac{A_{31}}{\sqrt{h}} = \frac{2\omega a^2 \cot \theta}{r(a^2 - r^2)}, \quad \Omega_{*2} = A^{31}\sqrt{h} = \frac{2\omega a^2 r \cot \theta}{a^2 - r^2}. \quad (5.72)$$

Используя полученное решение $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (5.70) х.и.-уравнений Максвелла, мы получаем $\cot \theta = 0$ и, следовательно, $\Omega^{*2} = \Omega_{*2} = 0$. Это означает, что магнитное поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара имеет только единственную компоненту

$$H^{*1} = -\frac{2\varphi}{c}\Omega^{*1}, \quad (5.73)$$

не равную нулю, которая, таким образом, представляют собой радиальную r -компоненту, направленную от центра звезды к её Южному и Северному полюсам, а затем — к соответствующим полярным направлениям от звезды во внешний космос.

Этот результат и решение $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ были получены на основе нашей математической теории жидких нейтронных звёзд и пульсаров. Эти чисто теоретические результаты полностью совпадают с известными наблюдательными данными о пульсарах.

5.5 Частота и напряжённость магнитного поля пульсара

Отдельные импульсы электромагнитного излучения, испускаемые пульсаром (быстровращающейся нейтронной звездой), повторяются с частотой, равной частоте вращения самой звезды. Рассчитаем периодичность импульсов типичного пульсара на основе нашей теории жидких нейтронных звёзд и пульсаров.

Вычисляя $\Omega_{*j}\Omega^{*j}$ на Южном и Северном полюсах вращающейся нейтронной звезды (пульсара), где $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\Omega_{*j}\Omega^{*j} = \Omega_{*1}\Omega^{*1} = \frac{\omega^2 a^2}{a^2 - r^2}. \quad (5.74)$$

Тогда условие (5.58), связывающее угловую скорость вращения пространства и силу гравитации в нём, принимает вид

$$\frac{\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} = \frac{n}{1 - 4n} \frac{c^2 r^2}{a^2 (a^2 - r^2)}. \quad (5.75)$$

Магнитная напряжённость электромагнитного поля вращающейся нейтронной звезды или пульсара равна $H^{*1} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*1}$ (5.73). Она обусловлена вращением звезды. Следовательно, изучая полученное соотношение (5.75), мы можем сделать вывод об электромагнитном излучении звезды.

Отношение (5.75) имеет разрыв на поверхности звезды ($r = a$). Поэтому мы полагаем $r \neq a$. Таким образом, (5.75) принимает вид

$$r^2 = \frac{1 - 4n}{n} \frac{\omega^2 a^4}{c^2}, \quad (5.76)$$

где r с учётом решения $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (5.70) есть радиальное расстояние от центра звезды вдоль полярной оси её вращения.

В поверхностном слое звезды, откуда электромагнитное излучение излучается во внешний космос, имеем $r \simeq a$. Таким образом, после некоторых тривиальных преобразований мы получаем формулу для частоты импульсов магнитного поля звезды

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{n}{1 - 4n}} \quad \omega_0 = \frac{c}{a}, \quad (5.77)$$

где ω_0 есть предельно высокая частота вращения звезды, при которой звезда вращается со скоростью света.

Предположим, что $a = 10^6$ см, что является типичным радиусом нейтронной звезды. С этим радиусом мы получаем

$$\omega_0 = 3 \times 10^4 \text{ сек}^{-1}. \quad (5.78)$$

Из (5.77) следует, что n выражается частоту импульсов магнитного поля звезды как

$$n = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + 4\omega^2}. \quad (5.79)$$

Наблюдаемые частоты радиопульсаров находятся в диапазоне от $\omega_{\min} = 0,53$ до $\omega_{\max} = 448,57 \text{ сек}^{-1}$. Это означает, что $\omega^2 \ll \omega_0^2$.

Поэтому мы пренебрегаем ω в знаменателе (5.79) и получаем

$$n = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}. \quad (5.80)$$

Поэтому для реальных пульсаров коэффициент n лежит в диапазоне

$$3,1 \times 10^{-10} < n < 2,2 \times 10^{-4}. \quad (5.81)$$

Также согласно формуле (5.59), выведенной по нашей теории, скалярный потенциал электромагнитного поля пульсара равен

$$\varphi = c^2 \sqrt{\frac{n}{G}}. \quad (5.82)$$

Следовательно, для реальных пульсаров имеем

$$6,1 \times 10^{19} < \varphi < 5,2 \times 10^{22} \text{ грамм}^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ сек}^{-1}, \quad (5.83)$$

что в пределах верхнего теоретического ограничения на скалярный электромагнитный потенциал, который, согласно нашей теории, составляет $\varphi < 1,74 \times 10^{24}$ (5.60).

Наконец, вычислим ожидаемый диапазон величин напряжённости магнитного поля пульсаров. Согласно нашей теории жидких нейтронных звёзд и пульсаров, $H^{*1} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*1}$ (5.73). При вычисленном диапазоне скалярного электромагнитного потенциала φ и рассмотренном диапазоне частот вращения ω пульсаров получаем

$$2,1 \times 10^9 < H^{*1} < 1,5 \times 10^{15} \text{ грамм}^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ сек}^{-1}, \quad (5.84)$$

что хорошо соответствует магнитудам магнитного поля радиопулсаров, известным из радиоастрономических наблюдений.

5.6 Решение уравнений Максвелла в стационарном безвихревом электромагнитном поле пульсара

Ранее, в §5.4–§5.5, мы решали уравнения Максвелла в электромагнитном поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара, полагая вектор четырёхмерного тока j^α в поле равным нулю ($j^\alpha = 0$), что выполняется на поверхности звезды и выше, в космосе. См. (5.63) и далее. Другими словами, мы полагали, что электромагнитное поле не содержит источников (зарядов и токов).

Это условие порождает следующую проблему. Посмотрите на формулу для наблюдаемого импульса электромагнитного поля J_{em}^i (5.52), т.е. вектора Пойнтинга поля

$$J_{\text{em}}^i = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon^{ikm} E_k H_{*m} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \varepsilon^{ikm} F_k \Omega_{*m}. \quad (5.85)$$

Полагая $j^\alpha = 0$ в §5.4, мы получили, что только одна компонента $H^{*1} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*1}$ напряжённости магнитного поля H^{*i} , т.е., только на Южном и Северном полюсах звезды, отлична от нуля. С другой стороны, в этом случае круговой импульс поля J_{em}^3 , который должен генерировать магнитную составляющую H^{*1} , был бы равен нулю: $J_{\text{em}}^3 = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon^{312} E_1 H_{*2} = 0$. Это создаёт проблему, потому что теоретическая модель нейтронных звёзд и пульсаров, которая удовлетворяет астрономическим наблюдениям за пульсарами, совершенно очевидно, должна показывать как $H^{*1} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*1} \neq 0$, так и $J_{\text{em}}^3 = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon^{312} E_1 H_{*2} \neq 0$.

Напомним, что мы пришли к проблеме, что $H^{*1} \neq 0$, но $J_{\text{em}}^3 = 0$ в результате нашего предположения, согласно которому электромагнитное поле не имеет токов ($j^\alpha = 0$). Поэтому теперь будем решать уравнения Максвелла при условии $j^\alpha \neq 0$.

Сначала мы будем решать уравнения Максвелла в безвихревом электромагнитном поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара. В следующем §5.7 уравнения Максвелла будут решены в вихревом электромагнитном поле такой звезды.

Метрика пространства (пространства-времени) вращающейся жидкой нейтронной звезды или пульсара имеет вид (5.3). Эта метрика означает, что жидкая сфера не является коллапсаром из-за своего вращения (см. необходимые пояснения в §5.1).

Физические и геометрические характеристики пространства с этой метрикой были вычислены и представлены нами в §5.1. В дополнение к ним следует лишь добавить, что псевдовектор угловой скорости вращения такого пространства $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}$ имеет следующие ненулевые компоненты

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{*1} &= \omega, & \Omega_{*1} &= \frac{\omega a^2}{a^2 - r^2} \\ \Omega^{*2} &= \frac{2\omega a^2 \cot \theta}{r(a^2 - r^2)}, & \Omega_{*2} &= \frac{2\omega a^2 r \cot \theta}{a^2 - r^2} \end{aligned} \right\}, \quad (5.86)$$

соответственно квадрат псевдовектора угловой скорости равен

$$\Omega_{*j} \Omega^{*j} = \frac{\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} \left(1 + \frac{4a^2 \cot^2 \theta}{a^2 - r^2} \right). \quad (5.87)$$

Как и ранее, мы полагаем, что скалярный и векторный электромагнитные потенциалы постоянны и однородны (3.106), т.е. электромагнитное поле является стационарным и безвихревым

$$\left. \begin{aligned} \frac{* \partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} = 0 \\ \frac{* \partial q_i}{\partial t} = 0, \quad q_{ik} = \frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5.88)$$

тогда электрическая и магнитная напряжённости (5.47) равны

$$\left. \begin{aligned} E^i = -\frac{\varphi}{c^2} F^i, \quad E_i = -\frac{\varphi}{c^2} F_i \\ H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}, \quad H_{mn} = -\frac{2\varphi}{c} A_{mn} \end{aligned} \right\}. \quad (5.89)$$

По определению $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}$ перепишем H^{*i} в виде

$$H^{*i} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}, \quad H_{*i} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega_{*i}. \quad (5.90)$$

Используя формулу для F_1 (5.9), а затем вычисляя Ω^{*1} и Ω^{*2} по (5.86), мы получаем ненулевые компоненты E^i и H^{*i}

$$E_1 = -\frac{\varphi r}{a^2 - r^2}, \quad E^1 = -\frac{\varphi r}{a^2}, \quad (5.91)$$

$$H_{*1} = -\frac{2\varphi \omega a^2}{c(a^2 - r^2)}, \quad H^{*1} = -\frac{2\varphi \omega}{c}, \quad (5.92)$$

$$H_{*2} = -\frac{4\varphi \omega a^2 r \cot \theta}{c(a^2 - r^2)}, \quad H^{*2} = -\frac{4\varphi \omega a^2 \cot \theta}{cr(a^2 - r^2)}. \quad (5.93)$$

Найдём, как в данном случае распределяется магнитная напряжённость по поверхности вращающейся жидкой сферы. Рассмотрим уравнения Максвелла в их полной форме (5.62)

$$\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \nabla_\sigma F^{*\mu\sigma} = 0, \quad (5.94)$$

что подразумевает наличие тока поля ($j^\alpha \neq 0$). Их физически наблюдаемые х.и.-проекции (х.и.-уравнения Максвелла) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ {}^* \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{{}^* \partial E^i}{\partial t} + D E^i \right) &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (5.95)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ {}^* \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{{}^* \partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II,} \quad (5.96)$$

подробнее см. главу 3 книги [18]. Здесь $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikn} E_k$ псевдотензор, дуальный вектору электрической напряжённости E_i , тогда как $D = h^{ik} D_{ik}$ скорость деформации пространства.

Поскольку рассматриваемое нами пространство вращающейся жидкой сферы не деформируется, а также, согласно нашим исходным предположениям, электрическая и магнитная напряжённости стационарны, х.и.-уравнения Максвелла упрощаются

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ {}^* \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (5.97)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ {}^* \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II.} \quad (5.98)$$

Первое уравнение группы I (5.97) принимает вид

$$\frac{4\varphi\omega^2 a^2}{c^2(a^2 - r^2)} \left(1 + \frac{4a^2 \cot^2 \theta}{a^2 - r^2} \right) - \frac{\varphi(3a^2 - 2r^2)}{a^2(a^2 - r^2)} = 4\pi\rho. \quad (5.99)$$

Во втором уравнении группы I $j^1 = j^2 = 0$ в рамках нашей модели, а уравнение для j^3 принимает вид

$$\frac{\varphi\omega a^3}{r^2(a^2 - r^2)} \frac{\cot \theta}{\sqrt{a^2 - r^2} \sin \theta} = -\pi j^3, \quad (5.100)$$

тогда как абсолютное значение х.и.-вектора тока j^i равно

$$j = \sqrt{j_k j^k} = \frac{\varphi \omega a^3 \cot \theta}{\pi r (a^2 - r^2) \sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (5.101)$$

Уравнения группы II (5.98) удовлетворяются как тождества. Таким образом, эти формулы для ρ , j^3 и j (5.99–5.101) являются точными решениями рассмотренных х.и.-уравнений Максвелла.

Таким образом, мы получили точные решения уравнений Максвелла во внутреннем электромагнитном поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара, где поле возникает за счёт своих источников — распределённых зарядов ρ и токов j^i .

Закон сохранения электрического заряда устанавливает связь между источниками электромагнитного поля. Этот закон сохранения, известный также как уравнение непрерывности, имеет следующий общековариантный вид

$$\nabla_\sigma j^\sigma = 0. \quad (5.102)$$

Это означает, что распределённые заряды ρ и токи j^i (физически наблюдаемые х.и.-проекции четырёхмерного вектора тока j^α) сохраняются в четырёхмерном объёме поля.

Четырёхмерный электромагнитный потенциал A^σ должен удовлетворять общековариантному условию Лоренца

$$\nabla_\sigma A^\sigma = 0, \quad (5.103)$$

согласно которому четырёхмерный потенциал поля A^σ и, следовательно, его х.и.-проекции φ и q^i (х.и.-скалярный и х.и.-векторный потенциалы поля) сохраняются в четырёхмерном объёме поля.

В общем случае закон сохранения (5.102) и условие Лоренца (5.103), записанные в терминах хронометрически инвариантного формализма, имеют вид, соответственно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho D + {}^* \widetilde{\nabla}_i j^i - \frac{1}{c^2} F_i j^i = 0, \quad (5.104)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c} D + {}^* \widetilde{\nabla}_i q^i - \frac{1}{c^2} F_i q^i = 0, \quad (5.105)$$

где ${}^* \widetilde{\nabla}_i = {}^* \nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$. Подробнее см. главу 3 книги [18].

Нетрудно показать, что при конкретных условиях рассматриваемой нами задачи х.и.-уравнение непрерывности (5.104) и х.и.-условие Лоренца (5.105) удовлетворяются как тождества.

Теперь на основе полученных решений (5.99–5.101) уравнений Максвелла мы ищем х.и.-вектор Пойнтинга J_{em}^i , т.е. наблюдаемый импульс электромагнитного поля. Нам нужно знать, как распределяется вектор Пойнтинга по поверхности сферы, которая является поверхностью вращающейся нейтронной звезды или пульсара.

Вектор Пойнтинга J_{em}^i является второй из трёх физически наблюдаемых проекций тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ (5.42), равных ρ_{em} (5.44), J_{em}^i (5.45) и U_{em}^{ik} (5.46). Мы ищем вектор Пойнтинга J_{em}^i (5.45) в рамках наших предположений (5.88), согласно которым скалярный φ и векторный q_i электромагнитные потенциалы являются постоянными и распределёнными однородно, т.е. данное электромагнитное поле является стационарным и безвихревым.

Подставляя в (5.44–5.46) существенные (отличные от нуля) компоненты электрической напряжённости E^i и магнитной напряжённости H^{*i} , равные (5.91–5.93), получаем

$$\begin{aligned} \rho_{em} &= \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left(\frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) = \\ &= \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left[\frac{\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} + \frac{4\omega^2 a^4 \cot^2 \theta}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{c^2 r^2}{4a^2 (a^2 - r^2)} \right], \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} J_{em}^3 &= \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \varepsilon^{ikm} F_k \Omega_{*m} = \frac{\varphi^2 F_1 \Omega_{*2}}{2\pi c^4 \sqrt{h}} = \\ &= \frac{\varphi^2 \omega a}{\pi c^2 (a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (5.107)$$

$$J_{em} = \left| \sqrt{h_{33} J_{em}^3 J_{em}^3} \right| = \frac{\varphi}{\pi c^2} \frac{\omega a r \cot \theta}{(a^2 - r^2)^{3/2}}. \quad (5.108)$$

Глядя на эти уравнения, мы можем сделать некоторые выводы о вращающихся нейтронных звёздах и пульсарах, электромагнитное поле которых является безвихревым.

Плотность электромагнитного поля ρ_{em} такой звезды обусловлена как действующей гравитационно-инерциальной силой, которая является неньютоновской силой гравитации F_i , действующей

внутри звезды, так и её вращением. Плотность её электромагнитного поля ρ_{em} является ненулевой как при выполнении одного из условий $F_i \neq 0$ и $A_{ik} \neq 0$, так и в результате совместного выполнения этих условий. Плотность импульса поля J_{em}^i является ненулевой только при совместном выполнении условий $F_i \neq 0$ и $A_{ik} \neq 0$.

Как следует из (5.106), плотность ρ_{em} безвихревого электромагнитного поля вращающейся нейтронной звезды (пульсара) равна нулю на экваторе звезды ($\theta = 0$). Затем плотность электромагнитного поля ρ_{em} возрастает с географической широтой θ к Южному полюсу и Северному полюсу, где $\theta = \frac{\pi}{2}$ и, таким образом, она принимает максимальное значение $\rho_{\text{em}} = (\rho_{\text{em}})_{\text{max}}$.

В противоположность, плотность импульса электромагнитного поля J_{em}^i (5.108) предельно высока на экваторе, где $\theta = 0$. Затем величина импульса поля J_{em}^i падает с географической широтой θ к Южному и Северному полюсам, где принимает значение $J_{\text{em}}^i = 0$.

В дополнение к этому мы также можем сделать вывод о плотности заряда ρ и токах j^i в безвихревом электромагнитном поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара.

Перепишем формулы для плотности заряда ρ (5.99) и тока j^3 (5.100), полученные из группы I х.и.-уравнений Максвелла, как

$$\rho = \frac{\varphi}{\pi c^4} \left(\Omega_{*j} \Omega^{*j} - \frac{1}{4} \nabla_j F^j \right), \quad (5.109)$$

$$j^3 = -\frac{\varphi}{\pi} \frac{\omega a^3}{r^2 (a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta}, \quad (5.110)$$

где

$$\nabla_j F^j = \frac{c^2 (3a^2 - 2r^2)}{a^2 (a^2 - r^2)} > 0, \quad (5.111)$$

$$j = \left| \sqrt{h_{33} j_{\text{em}}^3 j_{\text{em}}^3} \right| = \frac{\varphi \omega a^3 \cot \theta}{\pi r (a^2 - r^2)^{3/2}}. \quad (5.112)$$

Мы видим, что плотность заряда внутри вращающейся нейтронной звезды или пульсара положительна $\rho > 0$ (что должно быть согласно физическому смыслу физического поля), если

$$\Omega_{*j} \Omega^{*j} > \frac{1}{4} \nabla_j F^j. \quad (5.113)$$

Запишем это неравенство с помощью формулы для ρ (5.99). Получаем следующее условие

$$\frac{4\omega^2 a^2}{c^2} \left(1 + \frac{4 \cot^2 \theta}{a^2 - r^2} \right) > \frac{3a^2 - 2r^2}{a^2}, \quad (5.114)$$

которое необходимо по физическому смыслу.

Сравним полученные формулы для тока электромагнитного поля j^3 (5.110) и его мощности j (5.112) с формулами для плотности импульса электромагнитного поля J_{em}^3 (5.107) и величины этого импульса J_{em} (5.108). В итоге мы имеем

$$c^2 J_{\text{em}}^3 = -\frac{\varphi r^2}{a^2} j^3, \quad c^2 J_{\text{em}} = \frac{\varphi r^2}{a^2} j. \quad (5.115)$$

С учётом (5.58) выразим скалярный потенциал электромагнитного поля φ , который $\varphi = \text{const}$ согласно нашим исходным предположениям, через безразмерную постоянную $n = \frac{G\varphi^2}{c^4}$ (5.59), равную $n < \frac{1}{4}$ (см. в конце §5.3). Итак, мы имеем

$$\varphi = c^2 \sqrt{\frac{n}{G}}, \quad \varphi^2 = \frac{nc^4}{G}, \quad n < \frac{1}{4}. \quad (5.116)$$

С ними мы получаем

$$\rho_{\text{em}} = \frac{n}{2\pi G} \left(\Omega_{*j} \Omega^{*j} + \frac{1}{4c^2} F_j F^j \right), \quad (5.117)$$

$$J_{\text{em}}^3 = \frac{E_1 H_{*2}}{\sqrt{h}} = \frac{4nc^3}{G} \frac{\omega a}{(a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta}, \quad (5.118)$$

$$\rho = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\Omega_{*j} \Omega^{*j} - \frac{1}{4} \nabla_j F^j \right), \quad (5.119)$$

$$j^3 = -c^2 \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{\omega a^3}{r^2 (a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta}, \quad (5.120)$$

$$J_{\text{em}}^3 = -\frac{4\pi r^2 c}{a^2} \sqrt{\frac{n}{G}} j^3. \quad (5.121)$$

Мы видим, что чем больше скалярный электромагнитный потенциал φ (5.116) вращающейся нейтронной звезды или пульсара,

тем сильнее трёхмерный круговой ток j^3 и трёхмерный круговой импульс J_{em}^3 его электромагнитного поля. Более того, ток и поток импульса электромагнитного поля существуют в этой звезде, только если она вращается в экваториальной плоскости (x^1, x^3) , т.е. только если $\Omega_{*2} \neq 0$. Если бы нейтронная звезда не вращалась ($\Omega_{*j} \Omega^{*j} = 0$), плотность электрического заряда её внутреннего электромагнитного поля была бы отрицательной ($\rho < 0$).

Итак, мы пришли к неудовлетворительному результату. И круговой ток электромагнитного поля j^3 (текущий по долготе ϕ), и импульс электромагнитного поля J_{em}^3 равны нулю на Южном и Северном полюсах звезды, где географическая широта $\theta = \frac{\pi}{2}$, и достигают своей предельной мощности на экваторе, где широта $\theta = 0$.

Здесь мы предполагали, что электромагнитное поле вращающейся нейтронной звезды является безвихревым. Последняя попытка по согласованию с данными наблюдений будет сделана с вихревым электромагнитным полем вращающейся нейтронной звезды (пульсара). Мы сделаем это далее, в §5.7.

5.7 Решение уравнений Максвелла в стационарном вихревом электромагнитном поле пульсара

По аналогии с §3.7 рассмотрим вращающуюся нейтронную звезду (пульсар), электромагнитное поле которой является вихревым. В этом случае ротор q_{ik} трёхмерного х.и.-векторного потенциала q_i электромагнитного поля отличен от нуля

$$q_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{\partial q_k}{\partial x^i} \neq 0. \quad (5.122)$$

Четырёхмерный потенциал электромагнитного поля

$$A^\alpha = \varphi \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 1 \quad (5.123)$$

имеет две х.и.-проекции, которые равны

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \tilde{\varphi}, \quad A^i = q^i = \frac{\tilde{\varphi}}{c} v^i, \quad (5.124)$$

где $\tilde{\varphi}$ есть релятивистский х.и.-скалярный потенциал поля

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq \varphi, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad v^2 = h_{ik} v^i v^k \ll c^2. \quad (5.125)$$

Мы полагаем, что $\varphi = const$ и $q^1 = q^2 = 0$ в поле. Таким образом, мы имеем $v^3 = \frac{d\phi}{d\tau} = \omega$ и, следовательно,

$$q^3 = \frac{\varphi\omega}{c}, \quad q_3 = \frac{\varphi\omega}{c} r^2 \sin^2\theta, \quad (5.126)$$

$$q_{31} = \frac{\partial q_3}{\partial r} = \frac{2\varphi\omega}{c} r \sin\theta, \quad (5.127)$$

$$q_{23} = -\frac{\partial q_3}{\partial\theta} = -\frac{2\varphi\omega}{c} r^2 \sin\theta \cos\theta. \quad (5.128)$$

Используя общее определение магнитной напряжённости поля (5.47), мы вычисляем ненулевые компоненты магнитной напряжённости вихревого электромагнитного поля

$$H_{23} = -\frac{2\varphi\omega r^2 \sin\theta}{c} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \cos\theta \right), \quad (5.129)$$

$$H_{31} = \frac{2\varphi\omega}{c} \left[\sin^2\theta - \frac{2a^3 \cos\theta}{(a^2 - r^2) \sqrt{a^2 - r^2}} \right]. \quad (5.130)$$

Используя определение х.и.-псевдовектора магнитной напряжённости электромагнитного поля

$$H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} q_{mn} - \frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}, \quad (5.131)$$

перепишем компоненты H_{23} (5.129) и H_{31} (5.130) в виде

$$H^{*1} = -\frac{2\varphi\omega}{c} \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \cos\theta \right), \quad (5.132)$$

$$H^{*2} = \frac{2\varphi\omega}{cr} \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sin\theta}{a} - \frac{2a^2 \cot\theta}{a^2 - r^2} \right), \quad (5.133)$$

а их ковариантные (с нижними индексами) версии могут быть получены как $H_{*1} = h_{11} H^{*1}$ и $H_{*2} = h_{22} H^{*2}$.

Найдём теперь решение х.и.-уравнений Максвелла. В рассматриваемом нами случае, когда электромагнитное поле стационарно и пространство не деформируется, х.и.-уравнения Максвелла имеют

вид (5.97–5.98), т.е.

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ {}^* \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (5.134)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ {}^* \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II.} \quad (5.135)$$

После подстановки напряжённостей вихревого электромагнитного поля уравнения группы II (5.135) удовлетворяются как тождества. Уравнения группы I принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{4\varphi\omega^2}{c^2} \left[\frac{a^2}{a^2 - r^2} \left(1 + \frac{4a^2 \cot^2\theta}{a^2 - r^2} \right) - \frac{a \cos\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] - \\ - \frac{\varphi(3a^2 - 2r^2)}{a^2(a^2 - r^2)} = 4\pi\check{\rho}, \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$\frac{3\varphi\omega}{2a^2} + \frac{\varphi\omega a^3}{r^2(a^2 - r^2)\sqrt{a^2 - r^2}} \frac{\cot\theta}{\sin\theta} = -\pi\check{j}^3, \quad (5.137)$$

где $\check{\rho}$ и \check{j}^3 плотность заряда и ток вихревого электромагнитного поля, тогда как $\omega = \Omega^{*1}$. Физический смысл этих уравнений выглядит более понятным, если их переписать в виде

$$\check{\rho} = \frac{\varphi}{\pi c^2} \left(\Omega_{*j} \Omega^{*j} - \frac{1}{4} \nabla_j F^j \right) - \frac{\varphi\omega^2}{\pi c^2} \frac{a \cos\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (5.138)$$

$$\check{j}^3 = -\frac{\varphi\omega a^3}{\pi r^2(a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot\theta}{\sin\theta} - \frac{3\varphi\omega}{2\pi a^2}. \quad (5.139)$$

Выразим теперь плотность заряда $\check{\rho}$ и ток \check{j}^3 вихревого электромагнитного поля через те же характеристики ρ (5.109) и j^3 (5.110) что мы вычислили в безвихревом поле

$$\check{\rho} = \rho - \frac{\varphi\omega^2 a \cos\theta}{\pi c^2 \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (5.140)$$

$$\check{j}^3 = j^3 - \frac{3\varphi\omega}{2\pi a^2}. \quad (5.141)$$

Как видно из уравнений (5.140) и (5.141), в вихревом электромагнитном поле вращающейся нейтронной звезды (пульсара) плотность заряда и ток поля отличаются от таковых в безвихревом электромагнитном поле членами, зависящими от вращения звезды.

Соответственно плотность поля ρ_{em} (5.44) и поток кругового импульса J_{em}^3 (5.45) вихревого электромагнитного поля равны

$$\begin{aligned} \check{\rho}_{\text{em}} = & \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left(\frac{1}{4c^2} F_j F^j + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) + \\ & + \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left[\omega^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2} \right) - \frac{a\omega^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right], \end{aligned} \quad (5.142)$$

$$\check{J}_{\text{em}}^3 = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2 a^2} \left[\frac{2\omega a^3}{(a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta} - \omega \right], \quad (5.143)$$

или, в других обозначениях,

$$\check{\rho}_{\text{em}} = \rho_{\text{em}} + \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left[\omega^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2} \right) - \frac{\omega^2 a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right], \quad (5.144)$$

$$\check{J}_{\text{em}}^3 = J_{\text{em}}^3 - \frac{\varphi^2 \omega}{2\pi c^2 a^2}. \quad (5.145)$$

Чтобы понять смысл этих полученных формул, напомним, что, как следует из формул для A_{31} (5.10)

$$A_{31} = \frac{2\omega a^3 r \cos \theta}{(a^2 - r^2)^{3/2}}, \quad A^{31} = \frac{2\omega a \cot \theta}{r \sqrt{a^2 - r^2} \sin \theta}, \quad (5.146)$$

эта компонента и, следовательно, $\Omega^{*2} = \frac{1}{2} \varepsilon^{231} A_{31}$ зависят от географической широты θ звезды, а компонента $\Omega^{*1} = \frac{1}{2} \varepsilon^{123} A_{23} = \omega$ нет.

Полученные формулы для вектора тока \check{J}^3 (5.141) и вектора Пойнтинга \check{J}_{em}^3 (5.145) вихревого электромагнитного поля вращающейся нейтронной звезды (пульсара) содержат член, который не зависит от географической широты. Это означает, что, в отличие от безвихревого электромагнитного поля, вектор тока \check{J}^3 и поток импульса \check{J}_{em}^3 вихревого электромагнитного поля отличны от нуля на Южном и Северном полюсах звезды.

Полученный результат $\check{J}_{\text{em}}^3 \neq 0$ на Южном полюсе и Северном полюсе означает, что вращающаяся нейтронная звезда (пульсар)

с вихревым электромагнитным полем испускает электромагнитное излучение вдоль своей полярной оси, а та, что обладает безвихревым электромагнитным полем — нет.

Также мы должны сделать ещё один важный вывод в рамках нашей математической теории пульсаров. Посмотрим на формулу для напряжённости магнитного поля $H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}$ (5.47)

$$\begin{aligned} H^{*i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} \right) - \frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} q_{mn} - \frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}. \end{aligned} \quad (5.147)$$

Как видно из этой формулы, псевдовектор напряжённости магнитного поля H^{*i} является суммой псевдовектора ротора электромагнитного поля $q^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} q_{mn}$ и псевдовектора Ω^{*i} угловой скорости вращения звезды. Напряжённость магнитного поля H^{*i} совпадает с псевдовектором вращения звезды Ω^{*i} только, если ротор электромагнитного поля q_{mn} равен нулю. Если $q_{mn} \neq 0$, т.е. в вихревом электромагнитном поле, то H^{*i} отклоняется от Ω^{*i} . Чем сильнее завихрение q_{mn} электромагнитного поля, тем больше магнитная ось отклоняется от оси вращения звезды.

Астрономы говорят нам, что электромагнитное поле наблюдаемых пульсаров очень сильное. Они также говорят, что электромагнитное излучение исходит от такой звезды только в полярных областях, где широтная и долготная компоненты электромагнитного поля не так сильны, как в экваториальных широтах. Также по колебанию сигналов от пульсаров астрономы делают вывод, что ось излучения и ось вращения пульсара не совпадают. Все эти факты наблюдательной астрономии совпадают с нашими теоретическими результатами о пульсарах.

В итоге наша математическая теория пульсаров приводит нас к следующим выводам, согласующимся с данными наблюдений:

Вращающаяся нейтронная звезда может быть пульсаром только в том случае, если её электромагнитное поле вихревое. Более того, завихрённость электромагнитного поля означает, что магнитная ось не совпадает с осью вращения звезды.

В противном случае в нейтронной звезде, электромагнитное поле которой безвихревое, электромагнитное излучение исходило бы не от Южного и Северного полюсов.

Все эти теоретические результаты получены нами в рамках предположения о том, что скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля звезды не зависят от времени. Конечно, некоторые временные вариации потенциалов должны оказывать влияние на вектор Пойнтинга (поток импульса поля) и, следовательно, на электромагнитное излучение, испускаемое пульсаром. Но теперь мы пренебрегаем этими эффектами.

5.8 Геометризация электромагнитного поля пульсара

Геометризация электромагнитного поля — одна из первоочередных задач общей теории относительности. Как показал ещё Эйнштейн, эта задача в общем случае весьма нетривиальна математически. Поэтому в целом она ещё не решена. Тем не менее геометризация электромагнитного поля возможна в частных случаях, при определённых условиях, упрощающих математику.

Покажем теперь, что в случае пульсара электромагнитное поле геометризовано. На языке математики это означает, что если у нас есть уравнения поля Эйнштейна и уравнения Максвелла, характеристики электромагнитного поля могут быть выражены только через геометрические характеристики пространства.

Рассмотрим теперь уравнения Эйнштейна (5.18–5.20) и Максвелла (5.134–5.135) во внутреннем поле вращающейся нейтронной звезды (пульсара). Заметим, что в метрике де Ситтера, применённой нами к нейтронным звёздам, λ -член описывает физический вакуум в состоянии инфляции $\lambda = \kappa\rho$ (см. главу 1). Кроме того, как мы показали в §5.2, эта форма уравнений Эйнштейна удовлетворяет уравнениям сохранения в пространстве с этой метрикой.

Будем рассматривать вихревое электромагнитное поле. Это потому, что мы показали, что только вихревое поле даёт результат, совпадающий с астрономическими наблюдениями пульсаров, т.е. тот факт, что пульсар испускает электромагнитное излучение только из своих полярных областей.

По-прежнему, мы полагаем скалярный потенциал электромагнитного поля φ не зависящим от времени и выраженным через фун-

даментальные константы как $\varphi = c^2 \sqrt{\frac{n}{G}}$ (5.59), где $n < \frac{1}{4}$ (см. в конце §5.3). С его помощью мы получаем электрическую и магнитную напряжённости вихревого поля (см. §5.7) в виде

$$E^1 = -\sqrt{\frac{n}{G}} \frac{c^2 r}{a^2}, \quad (5.148)$$

$$E_1 = h_{11} E^1 = -\sqrt{\frac{n}{G}} \frac{c^2 r}{a^2 - r^2}, \quad (5.149)$$

$$\begin{aligned} H^{*1} &= -2\omega c \sqrt{\frac{n}{G}} \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \cos \theta \right) = \\ &= -2c \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\Omega^{*1} + \frac{\omega \sqrt{a^2 - r^2}}{a} \cos \theta \right), \end{aligned} \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} H^{*2} &= \frac{2\omega c}{r} \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \sin \theta - \frac{2a^2 \cot \theta}{a^2 - r^2} \right) = \\ &= -2c \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\Omega^{*2} - \frac{\omega \sqrt{a^2 - r^2}}{ar} \sin \theta \right), \end{aligned} \quad (5.151)$$

$$H_{*1} = h_{11} H^{*1} = \frac{a^2}{a^2 - r^2} H^{*1}, \quad (5.152)$$

$$H_{*2} = h_{22} H^{*2} = r^2 H^{*2}. \quad (5.153)$$

Как видно из этих формул, и электрическая напряжённость, и магнитная напряжённость поля здесь выражаются только через геометрические характеристики внутреннего пространства звезды.

При этом, согласно метрике внутреннего пространства вращающейся нейтронной звезды или пульсара, мы имеем Ω^{*1} (5.71), Ω^{*2} (5.72), $\Omega_{*j} \Omega^{*j}$ (5.87), которые равны

$$\Omega^{*1} = \frac{A_{23}}{\sqrt{h}} = \omega, \quad \Omega_{*1} = A^{23} \sqrt{h} = \frac{\omega a^2}{a^2 - r^2}, \quad (5.154)$$

$$\Omega^{*2} = \frac{A_{31}}{\sqrt{h}} = \frac{2\omega a^2 \cot \theta}{r(a^2 - r^2)}, \quad \Omega_{*2} = A^{31} \sqrt{h} = \frac{2\omega a^2 r \cot \theta}{a^2 - r^2}, \quad (5.155)$$

$$\Omega_{*j} \Omega^{*j} = \frac{\omega^2 a^2}{a^2 - r^2} \left(1 + \frac{4a^2 \cot^2 \theta}{a^2 - r^2} \right). \quad (5.156)$$

Таким образом, плотность заряда $\check{\rho}$ (5.138) и вектор тока \check{j}^3 (5.139) вихревого электромагнитного поля вращающейся нейтронной звезды или пульсара выражаются как

$$\begin{aligned}\check{\rho} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{G}} \left(\Omega_{*j} \Omega^{*j} - \frac{1}{4} \nabla_j F^j \right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{\omega^2 a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \\ &= \rho - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{\omega^2 a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}},\end{aligned}\quad (5.157)$$

$$\begin{aligned}\check{j}^3 &= -\frac{c^2}{\pi r^2} \sqrt{\frac{n}{G}} \frac{\omega a^3}{(a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta} + \frac{3c^2 \omega}{2a^2} \sqrt{\frac{n}{G}} = \\ &= j^3 + \frac{3c^2 \omega}{2a^2} \sqrt{\frac{n}{G}}.\end{aligned}\quad (5.158)$$

Соответственно плотность $\check{\rho}_{\text{em}}$ (5.142) и поток импульса \check{J}_{em}^3 (5.143) вихревого электромагнитного поля, полученные из тензора энергии-импульса поля, выражаются как

$$\begin{aligned}\check{\rho}_{\text{em}} &= \frac{n}{2\pi G} \left(\frac{1}{4c^2} F_j F^j + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) + \\ &+ \frac{n}{2\pi G} \left[\omega^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2} \right) - \frac{a\omega^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] = \\ &= \rho_{\text{em}} + \frac{n}{2\pi G} \left[\omega^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2} \right) - \frac{a\omega^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right],\end{aligned}\quad (5.159)$$

$$\check{J}_{\text{em}}^3 = \frac{nc^2}{2\pi G a^2} \left[\frac{2\omega a^3}{(a^2 - r^2)^{3/2}} \frac{\cot \theta}{\sin \theta} - \omega \right] = J_{\text{em}}^3 - \frac{nc^2 \omega}{2\pi G a^2}.\quad (5.160)$$

Мы видим, что все характеристики вихревого магнитного поля однозначно выражаются только через геометрические характеристики пространства внутри пульсара. Таким образом, вихревое электромагнитное поле вращающейся нейтронной звезды (пульсара) геометризовано.

Этот факт также означает, что система уравнений Эйнштейна и Максвелла во внутреннем пространстве пульсара является самосогласованной системой уравнений. Эта самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Максвелла полностью описывает как гравитационные, так и электромагнитные явления внутри пульсара.

Однако если электромагнитное поле вращающейся нейтронной звезды безвихревое, уравнения Эйнштейна и уравнения Максвелла не составляют самосогласованной системы: электромагнитное поле не геометризовано внутри такой звезды. Как было показано в §5.7, такая нейтронная звезда не может излучать электромагнитное излучение из своих полярных областей. Следовательно, это не может быть пульсар.

5.9 Границы физического пространства пульсара

Рассмотрим наблюдателя, система отсчёта которого связана с внутренним пространством звезды. Где, с его точки зрения, заканчивается наблюдаемое физическое пространство звезды? На каком расстоянии от звезды?

Ответы на эти вопросы даются в рамках теории физически наблюдаемых величин (хронометрических инвариантов). В терминах физических наблюдаемых реальное физическое пространство, регистрируемое наблюдателем, “заканчивается” на том расстоянии от него, где останавливается физическое наблюдаемое время: $d\tau = 0$. Физическое наблюдаемое время τ рассчитывается по метрике пространства наблюдателя. Поэтому реальные физические границы наблюдаемого пространства определяются условием остановки времени $d\tau = 0$ согласно метрике этого пространства.

Вычислим границу наблюдаемого пространства пульсара. Это — расстояние от центра пульсара, на котором, согласно метрике пространства пульсара, наблюдаемое время останавливается для наблюдателя, система отсчёта которого связана с пульсаром.

Интервал физически наблюдаемого времени имеет вид (1.30) и состоит из суммы двух членов

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c\sqrt{g_{00}}} dx^i = \sqrt{g_{00}} dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i. \quad (5.161)$$

Первый член обусловлен только потенциалом гравитационного поля $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$ (1.44). Второй член связан с тем, что пространство вращается, и зависит от линейной скорости этого вращения $v_i = -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$ (1.45).

Поэтому условие $d\tau = 0$, при котором наблюдаемое время останавливается в пространстве гравитирующего и вращающегося тела,

выражается как

$$\sqrt{g_{00}} dt = \frac{1}{c^2} v_i dx^i. \quad (5.162)$$

Метрика пространства вращающейся нейтронной звезды или пульсара имеет вид (5.3). Подробнее см. §5.1. В этой метрике

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad (5.163)$$

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = -\frac{2\omega ar^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (5.164)$$

В этом случае условие остановки физически наблюдаемого времени (5.162) имеет вид

$$g_{00} = \frac{1}{c^4} \left(v_3 \frac{dx^3}{dt} \right)^2, \quad (5.165)$$

где $\frac{dx^3}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \omega$. Подставив g_{00} (5.163) и v_3 (5.164) в условие остановки времени (5.165), мы получаем расстояние r , на котором наблюдаемое время останавливается

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{4a^2\omega^2 \cos^2 \theta}{c^2}}}. \quad (5.166)$$

Эта формула устанавливает физическую границу, на которой заканчивается физически наблюдаемое пространство вращающейся нейтронной звезды или пульсара. Как видно из этой формулы, граница r совпадает с физическим радиусом звезды a на Южном и Северном полюсах: географическая широта там равна $\theta = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos \theta = 0$ и, следовательно, $r = a$ согласно (5.166). Затем граница физически наблюдаемого пространства r уменьшается к экватору звезды, где она принимает предельно малое численное значение

$$r_{\min} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{4a^2\omega^2}{c^2}}}, \quad (5.167)$$

которое зависит только от радиуса звезды a и угловой скорости её вращения ω .

Чем быстрее вращается нейтронная звезда, тем более сжато её физическое пространство на экваторе. Согласно нашей формуле

(5.167), это сжатие проявляется только при релятивистских скоростях вращения, т.е. в пульсарах.

Рассмотрим PSR J1748-2446ad, самый быстрый из известных пульсаров, обнаруженный в 2004 году [32]. Он вращается с периодом 0,00139595482(6) сек, что означает угловую скорость вращения $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4501 \text{ сек}^{-1}$. Его радиус a оценивается менее чем в 16 км. Исходя из этих наблюдательных данных, можно рассчитать сжатие физического пространства пульсара на его экваторе

$$\frac{r_{\min}}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4a^2\omega^2}{c^2}}} \simeq 0,90. \quad (5.168)$$

5.10 Заключение

Итак, здесь в этой главе мы представили полную математическую теорию вращающихся жидких нейтронных звёзд и пульсаров. Повторим теперь наиболее важные выводы, к которым мы пришли на основе этой теории:

1. Как следует из нашей математической теории, электромагнитное поле вращающейся нейтронной звезды или пульсара обусловлено её вращением и гравитацией. Чем быстрее вращается звезда, тем сильнее магнитная напряжённость H^{*i} её электромагнитного поля;
2. Магнитная напряжённость H^{*i} поля пульсара направлена прямо вдоль полярной оси его вращения. Электромагнитное излучение исходит только от полюсов звезды, затем поступает во внешний космос строго по оси вращения звезды;
3. Электрическая напряжённость E_i зависит от пространственного распределения скалярного потенциала и от изменения во времени векторного потенциала электромагнитного поля. Магнитная напряжённость H^{*i} зависит от ротора векторного потенциала поля и от угловой скорости звезды. Таким образом, временные и пространственные вариации потенциалов электромагнитного поля должны влиять на исходящие электромагнитные импульсы, излучаемые пульсаром;
4. Вектор Пойнтинга (импульс электромагнитного поля) отличен от нуля на Южном и Северном полюсах вращающейся нейтронной звезды только в том случае, если её электромаг-

нитное поле вихревое. Следовательно, вращающаяся нейтронная звезда является пульсаром, излучающим электромагнитное излучение из полярных областей, только если её электромагнитное поле является вихревым; вращающаяся нейтронная звезда, электромагнитное поле которой не имеет вихрей, не может излучать электромагнитное излучение вдоль своей полярной оси, поэтому она не может быть пульсаром. В дополнение, как показывает наша теория, из-за вихрей электромагнитного поля магнитная ось пульсара не совпадает с осью его вращения. Этот теоретический вывод совпадает с астрономическими свидетельствами об быстрых периодических импульсах электромагнитного излучения, регистрируемых от наблюдаемых пульсаров.

Все эти выводы справедливы только для вращающейся звезды, физический радиус которой близок к её гильбертовому радиусу. Это — вращающиеся нейтронные звёзды, а также пульсары, а не обычные звёзды, такие как Солнце и т.д.

6.1 Невращающиеся жидкие коллапсары

Теперь мы собираемся изучить условие коллапса для невращающейся сферы, состоящей из идеальной жидкости, т.е. сколлапсировавшую жидкую звезду без вращения (в терминах нашей модели жидких звёзд). На первый взгляд эта постановка задачи звучит бессмысленно: идеальная жидкость несжимаема, следовательно, такое жидкое тело не может быть сжато. Да, было бы бессмысленно, если бы коллапс считали процессом сжатия жидкого космического тела. Мы так не делаем: мы не обсуждаем космогонию. Мы просто рассматриваем жидкий коллапсар как уже существующий объект. Таким образом, эта задача сводится к рассмотрению физических условий, а не эволюционного сжатия жидкого космического тела.

Космическое тело является гравитационным коллапсаром, если параметры его поля на его физической поверхности соответствуют условию гравитационного коллапса. А именно — гравитационное поле настолько сильно на поверхности тела, что световые сигналы не могут выйти из тела во внешний космос. С точки зрения общей теории относительности это означает, что физически наблюдаемое время останавливается на этой поверхности.

Согласно теории хронометрических инвариантов физически наблюдаемый интервал времени $d\tau$ (1.30) формулируется через гравитационный потенциал w и линейную скорость вращения пространства v_i в следующем виде

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i. \quad (6.1)$$

Поэтому общее условие гравитационного коллапса состоит из двух членов

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = 0. \quad (6.2)$$

В пространстве без вращения (где $v_i = 0$) общее условие гравитационного коллапса упрощается

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = 0, \quad (6.3)$$

или просто

$$g_{00} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 = 0. \quad (6.4)$$

Таким образом, невращающийся космический объект является коллапсаром, если трёхмерный гравитационный потенциал w на его поверхности принимает значение

$$w = c^2. \quad (6.5)$$

Рассмотрим условие коллапса для невращающейся звезды, состоящей из идеальной жидкости. Согласно вышесказанному, условие коллапса в этом случае имеет вид $g_{00} = 0$. Как видно из метрики пространства невращающейся жидкой звезды (2.76)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.6)$$

которая в терминах гильбертова радиуса r_g имеет вид (2.78)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.7)$$

условие коллапса ($g_{00} = 0$) в этом случае имеет вид

$$3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} = 0, \quad (6.8)$$

или, что то же самое

$$3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} = 0. \quad (6.9)$$

Таким образом, мы получаем радиальную координату r , на которой невращающаяся жидкая звезда радиуса a переходит в состояние гравитационного коллапса

$$r_c = \sqrt{9a^2 - \frac{8a^3}{r_g}}. \quad (6.10)$$

Поскольку мы имеем в виду реальные космические объекты, численное значение r_c должно быть реальным (равно как a и r_g). Этому требованию удовлетворяет следующее очевидное условие

$$a \leq 1,125 r_g. \quad (6.11)$$

Если это условие не выполняется ($a \geq 1,125 r_g$), то невращающееся жидкое тело (звезда) не может находиться в состоянии гравитационного коллапса.

Общее условие коллапса (6.11) включает особое условие $a = r_g$. Учитывая этот частный случай сколлапсировавшей невращающейся жидкой звезды, мы видим, что физический радиус a поверхности звезды, гильбертов радиус r_g и радиус пространственного разрыва $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$ в поле звезды совпадают

$$r_c = r_{br} = r_g = a. \quad (6.12)$$

Полученное условие коллапса $a = r_g$ (6.12) является всего лишь частным случаем общего условия коллапса (6.11). Общее условие коллапса (6.11) включает в себя три частных случая, касающихся положения физической поверхности сколлапсировавшей жидкой звезды:

1. Сколлапсировавшая жидкая звезда больше гильбертова радиуса, рассчитанного для звезды ($a > r_g$), но меньше $1,125 r_g$;
2. Поверхность сколлапсировавшей жидкой звезды совпадает с её гильбертовым радиусом ($a = r_g$);
3. Сколлапсировавшая жидкая звезда полностью находится под своим гильбертовым радиусом ($a < r_g$).

Очевидно, что r_c является мнимым для $r_g \ll a$, поэтому состояние гравитационного коллапса для такой звезды невозможно. Например, рассматривая Солнце ($a = 7 \times 10^7$ см, $M = 2 \times 10^{33}$ грамм, $r_g = 3 \times 10^5$ см), мы видим, что радиус коллапса r_c (6.10) принимает

нимое численное значение. То же самое верно и для других обычных звёзд, от сверхгигантов до белых карликов. Следовательно, *обычные звёзды не могут коллапсировать*.

Фактически, конкретное условие коллапса $r_c = r_{br} = r_g = a$ (6.12) формулирует радиус коллапса r_c следующим образом*

$$r_c = a = \sqrt{\frac{3}{\kappa\rho_0}} = \frac{4,0 \times 10^{13}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ см.} \quad (6.13)$$

Например, если сколлапсировавшая жидкая сфера состояла бы из обычной воды ($\rho_0 = 1,0$ грамм/см³), то её радиус был бы равен $r_c = 4,0 \times 10^{13}$ см = 3,1 а.е., т.е. находился бы в поясе астероидов (астероиды расположены примерно от 2,1 а.е. до 4,3 а.е. от Солнца).

Ещё один пример: чтобы коллапсар был размером с нейтронную звезду или пульсар радиусом $a = (8-16) \times 10^5$ см = 8–16 км, это жидкое тело должно иметь $\rho_0 = 2,5 \times 10^{15} - 6,3 \times 10^{14}$ грамм/см³ согласно полученной формуле для r_c (6.13).

Так, далее мы можем вычислить массу невращающегося жидкого коллапсара, исходя из формул $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$ и $a = r_c = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ (6.13). Получаем следующие зависимости

$$M = \frac{4\pi a}{\kappa} = 6,8 \times 10^{27} a \text{ грамм,} \quad (6.14)$$

$$M = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\kappa^{3/2}\sqrt{\rho_0}} = \frac{2,7 \times 10^{41}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ грамм,} \quad (6.15)$$

которые мы называем *соотношение масса-радиус* и *соотношение масса-плотность* для невращающихся жидких коллапсаров.

Так, если сколлапсировавшая жидкая сфера имеет размеры нейтронной звёзды или пульсара, т.е. $a = (8-16) \times 10^5$ см = 8–16 км, то её масса теоретически должна быть равной $M = (5,4-11) \times 10^{33}$ грамм, т.е. 2,7–5,5 массы Солнца.

6.2 Вселенная как огромный жидкий коллапсар

Ещё пример: сама Вселенная. Средняя плотность вещества во Вселенной, по оценкам астрономов, от 10^{-28} до 10^{-31} грамм/см³, постоянная Хаббла равна $H = \frac{c}{a} = (2,3 \pm 0,3) \times 10^{-18}$ сек⁻¹, а радиус

* $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 18,6 \times 10^{-28}$ см/грамм — гравитационная постоянная Эйнштейна.

наблюдаемой Вселенной равен $a = 1,3 \times 10^{28}$ см. На верхней границе расчётной плотности $\rho_0 = 10^{-28}$ грамм/см³ радиус коллапса r_c (6.10) принимает реальные численные значения. Соответственно, согласно наблюдательным оценкам, мы получаем следующие характеристики Вселенной

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ \rho_0 &= 10^{-28} \text{ грамм/см}^3 \\ M &= 9,2 \times 10^{56} \text{ грамм} \\ r_g &= 1,4 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_{br} &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_c &= 1,5 \times 10^{28} \text{ см} \end{aligned} \right\}. \quad (6.16)$$

Это — повод предположить, что Вселенную можно рассматривать как сферу идеальной жидкости, находящуюся в состоянии гравитационного коллапса. Мы будем называть её *жидкостной моделью Вселенной*. В этом случае мы должны иметь $r_c = r_{br} = r_g = a$ (6.12). Исходя из этого условия и численного значения радиуса Вселенной $a = 1,3 \times 10^{28}$ см, полученного из постоянной Хаббла, вычисляем массу и плотность, которые должны отнести к Вселенной в рамках настоящей жидкостной модели (согласно $a = r_g = \frac{2GM}{c^2}$ и $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$). Мы получаем

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ \rho_0 &= 9,6 \times 10^{-31} \text{ грамм/см}^3 \\ M &= 8,8 \times 10^{55} \text{ грамм} \\ r_g &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_{br} &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_c &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \end{aligned} \right\}. \quad (6.17)$$

Вычисленные теоретические значения (6.17) сравниваются с оценками наблюдательной астрономии (6.16) в таблице 6.1. Поскольку эти наблюдательные оценки известны очень приблизительно, можно сделать вывод, что наблюдаемая Вселенная представляет собой огромный коллапсар. Поэтому весь наблюдаемый мир, в том числе и мы сами, находится внутри огромной чёрной дыры.

	$M, \text{ г}$	$\rho_0, \text{ г/см}^3$	$a, \text{ см}$	$r_g, \text{ см}$	$r_{br}, \text{ см}$	$r_c, \text{ см}$
Наблюд. значение	$9,2 \times 10^{56}$	$\sim 10^{-28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,4 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,5 \times 10^{28}$
Жидкая модель	$8,8 \times 10^{55}$	$9,6 \times 10^{-31}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$

Таблица 6.1: Модель наблюдаемой Вселенной как невращающейся жидкой сферы в состоянии гравитационного коллапса. Расчётные параметры жидкостной модели сравнены с наблюдаемыми оценками.

Этот вывод совпадает с тем, к которому в 1965 г. пришёл Кирилл Петрович Станюкович [33]. Он не изучал геометрические свойства метрики жидкой сферы. Его анализ основывался на свойствах элементарных частиц. Следуя этому пути, Станюкович получил, что гильбертов радиус Вселенной совпадает с наблюдаемым горизонтом событий: наблюдаемая Вселенная является коллапсаром. Так, несмотря на использование другой теоретической базы, отличной от нашей, он пришёл к такому же заключению.

6.3 Давление и плотность внутри жидких коллапсаров

Вычислим давление и плотность внутри невращающихся жидких коллапсаров. Полученная нами формула (2.130) для давления p внутри сферы, заполненной идеальной жидкостью,

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}} \quad (6.18)$$

при условии коллапса $a = \sqrt{3/\kappa \rho_0}$ принимает простейший вид

$$p = -\rho_0 c^2 = \text{const}, \quad (6.19)$$

где $\rho_0 = \text{const}$ по определению внутри любой жидкой сферы. Эта формула является *уравнением состояния жидкости*. Такое состояние известно как *инфляция*: при положительной плотности вещества давление изнутри него отрицательно, поэтому внутреннее давление вещества пытается расширить тело изнутри (несмотря на то, что любое жидкое тело несжимаемо).

Как видно из этой формулы, давление внутри невращающегося жидкого коллапсара постоянно, как и плотность. Это означает, что жидкое вещество, заполняющее невращающийся коллапсар, находится в состоянии инфляции и имеет одинаковое давление и плотность по всему объёму коллапсара, от его центра до поверхности.

6.4 Внутренние силы гравитации. Внутреннее красное смещение

Силу гравитации, действующую внутри невращающегося жидкого коллапсара, можно найти из силы гравитации, действующей внутри невращающейся жидкой сферы, если сфера находится в состоянии гравитационного коллапса (в этом случае её физический радиус равен $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$).

Таким образом, на основе формул для компонент F_1 (2.123, 2.125) и F^1 (2.124, 2.126) силы гравитации, действующей внутри невращающейся жидкой сферы, мы получаем

$$F_1 = \frac{\kappa\rho_0 c^2 r}{3} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \frac{c^2 r}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (6.20)$$

$$F^1 = \frac{\kappa\rho_0 c^2 r}{3} = \frac{c^2 r}{a^2}. \quad (6.21)$$

Поскольку $r < a$ внутри сферы, то $F_1 > 0$. Следовательно, это — сила отталкивания. Эта сила возрастает с расстоянием r , от нуля в центре жидкого коллапсара до своего максимального значения на поверхности.

Если наблюдаемая Вселенная действительно является огромным жидким коллапсаром (об этом свидетельствуют, по крайней мере, астрономические данные, как было показано выше), то радиальная сила отталкивания, действующая внутри коллапсара, может вызвать сдвиг частоты у фотонов. Для исследования этой проблемы рассмотрим х.и.-уравнения изотропных геодезических

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_i c^i + \frac{\omega}{c^2} D_{ik} c^i c^k &= 0 \\ \frac{d(\omega c^i)}{d\tau} + 2\omega (D_k^i + A_k^i) c^k - \omega F^i + \omega \Delta_{nk}^i c^n c^k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.22)$$

которые представляют собой уравнения наблюдаемого движения светоподобной безмассовой частицы (такой как фотон, частота которого ω), движущейся с наблюдаемой скоростью света c^i . Х.и.-уравнения изотропных геодезических являются наблюдаемыми проекциями общековариантных уравнений изотропных геодезических. Подробнее см. [18, 19].

В пространстве, которое не вращается и не деформируется ($A_{ik} = 0, D_{ik} = 0$), таком как пространство невращающегося жидкого коллапсара, уравнения (6.22) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_i c^i &= 0 \\ \frac{d(\omega c^i)}{d\tau} - \omega F^i + \omega \Delta_{nk}^i c^n c^k &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.23)$$

Пусть фотон движется только в радиальном направлении $x^1 = r$. Рассмотрим х.и.-скалярное уравнение геодезических для этого фотона. Подставим полученную формулу для F_1 (6.20). Учтём также, что наблюдаемая скорость фотона есть наблюдаемая скорость света в радиальном направлении, $c^1 = \frac{dr}{d\tau}$. В результате х.и.-скалярное уравнение геодезических для фотона принимает вид

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{r}{a^2 - r^2} \frac{dr}{d\tau}. \quad (6.24)$$

Это уравнение решается как $d \ln \omega = -\frac{1}{2} d \ln |a^2 - r^2|$ или

$$d \ln \omega = d \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (6.25)$$

откуда получаем функцию

$$\omega(r) = \frac{Q}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad Q = const. \quad (6.26)$$

Постоянная интегрирования Q находится из очевидного граничного условия $\omega_{(r=0)} = \omega_0$. В результате мы получаем $Q = a^2 \omega_0$. Наконец, мы приходим к решению

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}. \quad (6.27)$$

На расстояниях, пройденных фотоном, малых по сравнению с радиусом коллапсара ($r \ll a$), эта формула принимает вид

$$\omega \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{r^2}{2a^2} \right). \quad (6.28)$$

Это вызывает *квадратичное красное смещение* частоты фотона

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} - 1 > 0, \quad (6.29)$$

который мы также называем *параболическим красным смещением* из-за параболической квадратичной функции. То есть сила отталкивания F_1 , действующая вдоль радиальной координаты от наблюдателя, тормозит фотоны, движущиеся внутри звезды к нему. На малых расстояниях пути фотона по сравнению с радиусом жидкой сферы ($r \ll a$) параболическое красное смещение равно

$$z \simeq \frac{r^2}{2a^2}, \quad (6.30)$$

или, выражая этот результат через постоянную Хаббла $H = \frac{c}{a}$, параболическое красное смещение равно

$$z \simeq \frac{H^2 r^2}{2c^2}. \quad (6.31)$$

Итак, наблюдаемые параметры Вселенной свидетельствуют о том, что это — огромный коллапсар. Эти данные совпадают с расчётами по представленной здесь теории невращающихся жидких коллапсаров. Поэтому астрономам следует ожидать нелинейного параболического красного смещения на фотонах, приходящих к нам из самых дальних областей Вселенной. Чем больше расстояние, пройденное фотоном, тем больше нелинейность функции красного смещения, которую ожидается зарегистрировать в астрономических наблюдениях.

6.5 Состояние сколлапсировавшего жидкого вещества

Обсудим теперь состояние вещества, заполняющего невращающиеся жидкие коллапсары. Как легко видеть, когда невращающаяся жидкая звезда находится в состоянии гравитационного коллапса

($r_g = a$), метрика пространства звезды (6.7) принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.32)$$

Эта метрика при определённом условии $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$ (таким образом, $\lambda > 0$), имеет тот же вид, что и метрика де Ситтера (1.5),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda r^2}{3} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.33)$$

описывающая сферическое распределение физического вакуума (λ -поле в уравнениях поля Эйнштейна).

Это означает, что жидкие коллапсары состоят из идеальной жидкости, состояние которой аналогично состоянию физического вакуума. Разница лишь в том, что жидкость, заполняющая коллапсары, имеет положительную плотность, а плотность физического вакуума отрицательна при $\lambda > 0$; см. подробности в §5.2 и §5.3 нашей книги [18]. Также обычные жидкие коллапсары имеют малый размер и высокую плотность (в отличие от Вселенной в целом). Поэтому жидкость, заполняющая обычные (компактные) коллапсары, находится в состоянии, близком к состоянию физического вакуума высокой плотности.

Что такое физический вакуум, известный также как λ -поле? Понятие физического вакуума (λ -поля) происходит от общей формулировки уравнений поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}, \quad (6.34)$$

содержащих λ -член в правой части. Правая часть определяет распределённую материю, заполняющую пространство, а левая часть определяет геометрию пространства, которая согласно формулировке является римановой. Перепишем уравнения поля в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (6.35)$$

где общий тензор энергии-импульса $\tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \check{T}_{\alpha\beta}$ характеризует как распределённое вещество, так и физический вакуум (λ -поле).

Тензор энергии-импульса физического вакуума

$$\check{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa} g_{\alpha\beta} \quad (6.36)$$

был впервые выведен нами в 1995 году и опубликован в §5.2 и §5.3 книги [18]. Он имеет физически наблюдаемые х.и.-проекции

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = const < 0, \quad (6.37)$$

$$\check{J}^i = \frac{c\check{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (6.38)$$

$$\check{U}^{ik} = c^2\check{T}^{ik} = \frac{\lambda}{\varkappa} c^2 h^{ik} = -\check{\rho} c^2 h^{ik}, \quad (6.39)$$

вычисленные тем же способом, что и наблюдаемые х.и.-проекции (1.91) любого тензора энергии-импульса.

Из скалярной х.и.-проекции $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = const$ следует, что физический вакуум однородно распределён в пространстве, т.е. является *однородной средой*. Векторная х.и.-проекция $\check{J}^i = 0$ показывает, что физический вакуум не содержит потоков энергии, т.е. является *неизлучающей средой*.

Найдём теперь уравнение состояния физического вакуума. Согласно хронометрически инвариантному формализму, х.и.-тензор напряжений U^{ik} выражается через давление внутри распределённой среды следующим образом [18, 23]

$$U_{ik} = p_0 h_{ik} - \alpha_{ik} = p h_{ik} - \beta_{ik}, \quad (6.40)$$

где p_0 есть равновесное давление, известное из уравнения состояния, p есть истинное давление внутри среды, α_{ik} есть х.и.-тензор вязких напряжений, $\beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{1}{3}\alpha h_{ik}$ его анизотропная часть, проявляющаяся в анизотропных деформациях, а $\alpha = h^{ik}\alpha_{ik}$ след тензора вязких напряжений α_{ik} . Поскольку сферически-симметричное пространство по определению изотропно, в данном случае мы имеем $\beta_{ik} = 0$. Также, по исходному предположению, среда вакуума — невязкая ($\alpha_{ik} = 0$). Поэтому для физического вакуума имеем

$$\check{U}_{ik} = \check{p} h_{ik} = -\check{\rho} c^2 h_{ik}. \quad (6.41)$$

Используя формулу следа тензора напряжений $U = h^{ik}U_{ik}$, мы получаем уравнение состояния физического вакуума

$$\check{p} = -\check{\rho}c^2, \quad (6.42)$$

которое, при отрицательной плотности $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\alpha} < 0$, является состоянием дефляции (внутреннее давление среды пытается сжать сферу).

Выведем компоненты силы гравитации, действующей внутри вакуумного коллапсара (мы называем его *коллапсар де Ситтера*). Следуя тому же методу вычислений, что и для силы (6.20, 6.21), действующей внутри жидкого коллапсара, мы получаем силу

$$F_1 = \frac{\lambda c^2 r}{3} \frac{1}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}, \quad F^1 = \frac{\lambda c^2 r}{3}, \quad (6.43)$$

а для частоты ω и частотного сдвига z фотона получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{\lambda r^2}{6} \right), \quad (6.44)$$

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} - 1 \simeq \frac{\lambda r^2}{6} > 0. \quad (6.45)$$

Чтобы понять полученные результаты, напомним, что мы смогли преобразовать метрику пространства сколлапсировавшей жидкой сферы (6.32) в метрику пространства де Ситтера (6.33) только с помощью условия $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$. Следовательно, мы приняли $\lambda > 0$. При помощи $\lambda > 0$ мы получили отрицательную плотность физического вакуума $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\alpha} < 0$ (6.37), состояние инфляции $\check{p} = -\check{\rho}c^2$ (6.42), силу отталкивания $F_1 > 0$ (6.43) и квадратичное (параболическое) красное смещение (6.45).

Это — те же результаты, что и для жидкого коллапсара, за исключением отрицательной плотности $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\alpha} < 0$ (и, следовательно, положительного давления $\check{p} = -\check{\rho}c^2 > 0$, создающего состояние дефляции), что создаёт проблему.

Чтобы устранить эту проблему, мы могли бы принять отрицательное значение λ , т.е. $\lambda < 0$, чтобы получить положительную плотность физического вакуума. Но если так, то радиус коллапсара a был бы мнимый, что в наблюдаемой Вселенной нонсенс.

Есть и другой способ устранить эту проблему. Рассмотрим уравнения Эйнштейна (6.34) в виде, где тензор энергии-импульса распределённого вещества и λ -член взяты с одним и тем же знаком

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (6.46)$$

В этом случае тензор энергии-импульса физического вакуума имеет вид

$$\check{T}_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{\kappa} g_{\alpha\beta}, \quad (6.47)$$

а его физически наблюдаемые х.и.-проекции равны

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = \frac{\lambda}{\kappa} = \text{const} > 0, \quad (6.48)$$

$$\check{j}^i = \frac{c \check{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (6.49)$$

$$\check{U}^{ik} = c^2 \check{T}^{ik} = -\frac{\lambda}{\kappa} c^2 h^{ik} = -\check{\rho} c^2 h^{ik}. \quad (6.50)$$

В этом случае физический вакуум (λ -поле) находится в состоянии инфляции ($\check{p} = -\check{\rho} c^2$), однако его плотность положительна: $\check{\rho} = \frac{\lambda}{\kappa} > 0$. Таким образом, модифицированная форма (6.46) уравнений поля Эйнштейна снимает вышеупомянутое противоречие между теорией жидких коллапсаров и наблюдаемой положительной плотностью вещества во Вселенной.

Следовательно, мы получаем, что физический вакуум (λ -поле) представляет собой однородную, невязкую, неизлучающую среду, находящуюся в состоянии инфляции.

Что касается выведенной формулы красного смещения (6.45), то она зависит только от формулы силы отталкивания, которая выводится из g_{00} метрики де Ситтера (6.33). Поскольку мы не меняли метрику пространства, формула красного смещения (6.45) остаётся неизменной.

6.6 Время течёт в обратном направлении внутри коллапсаров

В пространстве без вращения наблюдаемый интервал времени $d\tau$ (1.30) имеет упрощённую формулировку: $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$. Следовательно, $d\tau$ в поле невращающейся жидкой звезды, согласно g_{00}

метрики неврашающейся жидкой сферы (6.6), имеет вид

$$d\tau = \pm \frac{1}{2} \left(3 \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \right) dt. \quad (6.51)$$

При условии $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$, характеризующем звезду в состоянии гравитационного коллапса, эта формула принимает вид

$$d\tau = \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} dt. \quad (6.52)$$

Мы видим, что знак наблюдаемого интервала времени $d\tau$ внутри обычной жидкой звезды противоположен $d\tau$ внутри жидкой звезды в состоянии гравитационного коллапса. Иными словами, наблюдаемое время внутри обычных звёзд течёт в противоположном направлении, чем наблюдаемое время внутри коллапсаров.

Только один пример: мы обычно предполагаем, что наблюдаемое время течёт из прошлого в будущее. Если это так, то наблюдаемое время внутри коллапсаров течёт из будущего в прошлое.

6.7 Пограничные условия в жидком коллапсаре

При условии $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$, характеризующем жидкие коллапсары, ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (2.113–2.116), полученные в §2.3, принимают вид

$$R_{0101} = \frac{\kappa\rho_0}{12} = \frac{1}{4a^2} = \text{const}, \quad (6.53)$$

$$R_{1212} = -C_{1212} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \frac{r^2}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (6.54)$$

$$R_{1313} = -C_{1313} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2 \sin^2\theta}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \frac{r^2}{a^2} \frac{\sin^2\theta}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (6.55)$$

$$R_{2323} = -C_{2323} = \frac{\kappa\rho_0}{3} r^4 \sin^2\theta = \frac{r^4}{a^2} \sin^2\theta. \quad (6.56)$$

Так как $R_{0101} = \frac{\kappa\rho_0}{12} = \text{const}$ и $R_{0101} > 0$ при положительной плотности жидкости $\rho_0 > 0$, внутреннее пространство жидкого коллап-

сара представляет собой четырёхмерное *пространство положительной постоянной кривизны*. Это противоречит нашему результату §2.3, где мы показали, что пространство обычной жидкой сферы имеет *переменную четырёхмерную кривизну*, которая является *отрицательной*. Это значит, что:

Состояние гравитационного коллапса представляет собой “мост”, соединяющий мир переменной четырёхмерной отрицательной кривизны внутри обычных звёзд и мир четырёхмерной положительной постоянной кривизны внутри тех звёзд, что находятся в состоянии гравитационного коллапса.

Вычислим трёхмерную наблюдаемую кривизну C_{11} (2.104), C_{22} (2.105) и скалярную наблюдаемую кривизну $C = h^{ik}C_{ik}$ пространства внутри невращающегося жидкого коллапсара. При условии $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$, характеризующем жидкие коллапсары, получаем

$$C_{11} = -\frac{2\kappa\rho_0}{3} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = -\frac{2}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (6.57)$$

$$C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2\theta} = -\frac{2\kappa\rho_0 r^2}{3} = -\frac{2r^2}{a^2}, \quad (6.58)$$

$$C = -2\kappa\rho_0 = -\frac{6}{a^2} = \text{const} < 0. \quad (6.59)$$

Это — *трёхмерное пространство отрицательной постоянной кривизны* как и пространство обычных жидких звёзд.

Далее мы выражаем силу гравитации, действующую во внутреннем пространстве невращающегося жидкого коллапсара, через трёхмерную наблюдаемую кривизну внутреннего пространства. Из формул для F_1 (6.20) и F^1 (6.21) мы получаем

$$F_1 = -\frac{c^2 r}{2} C_{11}, \quad F^1 = -\frac{c^2}{2r} C_{22}. \quad (6.60)$$

Мы видим, что и трёхмерная наблюдаемая кривизна, и сила гравитации имеют пространственный разрывом

$$C_{11} \rightarrow -\infty, \quad F_1 \rightarrow \infty \quad (6.61)$$

при пограничном условии $r = a$ на поверхности коллапсара. Однако этот результат тривиален.

6.8 Вращающиеся жидкие коллапсары

Здесь мы усложняем нашу задачу рассмотрением вращающихся жидких коллапсаров. Пусть пространство с метрикой жидкого коллапсара (6.32) вращается с угловой скоростью ω вокруг полярной оси коллапсара. Тогда ненулевая компонента

$$g_{03} = -\frac{2\omega r^2 \cos \theta}{c} \quad (6.62)$$

характеризует это вращение, тогда как $g_{01} = g_{02} = 0$. Поэтому линейная скорость вращения пространства v_i (1.45) равна

$$v_3 = \frac{2\omega r^2 \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}, \quad v_1 = v_2 = 0. \quad (6.63)$$

В результате получаем метрику пространства вращающегося жидкого коллапсара

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \frac{2\omega r^2 \cos \theta}{c} c dt d\phi - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.64)$$

Можно доказать, что эта метрика пространства удовлетворяет уравнениям поля Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости (2.4). Это означает, что после подстановки отдельных компонент $g_{\alpha\beta}$, взятых из метрики (6.64), в уравнения поля, левая и правая части уравнения являются одинаковыми: уравнения поля становятся тождествами и, таким образом, удовлетворяются.

Общее условие гравитационного коллапса означает, что физическое наблюдаемое время останавливается ($d\tau = 0$), т.е.

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i = 0, \quad (6.65)$$

что учитывает как g_{00} , так и g_{0i} . Следовательно, при $v_i \neq 0$ условие коллапса не $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = 0$ как для невращающихся коллапсаров, а имеет полный вид

$$\sqrt{g_{00}} - \frac{1}{c^2} v_3 u^3 = 0, \quad (6.66)$$

где $u^3 = \frac{d\phi}{dt} = \omega$. Подставляя выражение для g_{00} , взятое из метрики (6.64), а также v_3 (6.63) и $u^3 = \omega$, получаем радиус поверхности коллапса вращающегося жидкого коллапсара

$$r_c = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{4\omega^2 a^2 \cos^2 \theta}{c^2}}} \leq a, \quad (6.67)$$

следовательно

$$r_c \simeq a \left(1 - \frac{2\omega^2 a^2 \cos^2 \theta}{c^2} \right) = a - \Delta a. \quad (6.68)$$

Полагая, например, $\omega = 10^3 \text{ сек}^{-1}$ и $a = 10^6 \text{ см}$, мы получаем $\Delta a \simeq 22 \cos^2 \theta$, т.е. $\Delta a \simeq 22$ метра на экваторе звезды, тогда как $\Delta a = 0$ на Южном и Северном полюсах.

Мы видим, что поверхность коллапса совпадает с радиусом a звезды только на полюсах вращения звезды, где широта равна $\theta \pm \frac{\pi}{2}$ и, поэтому, $\cos \theta = 0$. Другими словами, вращающиеся жидкие коллапсары не являются сферами, а имеют *эллиптическую форму*, уплощенную в экваториальной плоскости (ортогональной оси вращения).

Если коллапсар не вращается ($\omega = 0$), его форма сферически-симметрична ($r_c = a$). Наоборот, при предельной релятивистской скорости вращения эллиптическая форма коллапсара сильно уплощена в экваториальной плоскости. В предельном случае, когда коллапсар вращается со скоростью, очень близкой к скорости света ($\omega^2 a^2 \rightarrow c^2$), его форма задаётся уравнением

$$r_c = \frac{a}{\sqrt{1 + 4 \cos^2 \theta}}. \quad (6.69)$$

Остальные параметры вращающихся жидких коллапсаров, полученные в рамках нашей теории, не меняют принципиальных результатов, полученных в §5.1 для невращающихся жидких коллапсаров. Отличие состоит лишь в поправке на угловую скорость вращения коллапсара ω . Поэтому мы опускаем эти результаты из рассмотрения.

6.9 Заключение

Наконец, напомним все теоретические результаты касающиеся жидких коллапсаров, полученные нами выше:

1. Радиальная координата r_c (6.10), на которой невращающаяся жидкая сфера радиуса a приходит к состоянию гравитационного коллапса, равна

$$r_c = \sqrt{9a^2 - \frac{8a^3}{r_g}}. \quad (6.70)$$

Для обычных звёзд r_c принимает мнимые числовые значения. Следовательно, обычные звёзды, от сверхгигантов до карликов и белых карликов, не могут коллапсировать;

2. В силу требования, чтобы радиус коллапса r_c был реальным для реальных объектов, физический радиус невращающегося жидкого коллапсара a должен быть равен

$$a \leq 1,125 r_g. \quad (6.71)$$

Если невращающаяся жидкая звезда имеет радиус $a \geq 1,125 r_g$, то она не может находиться в состоянии гравитационного коллапса;

3. Плотность вещества является основной характеристикой невращающихся жидких коллапсаров. Физический радиус a такого коллапсара обратно пропорционален квадратному корню из его плотности ρ_0 (6.13)

$$a = \sqrt{\frac{3}{\kappa \rho_0}} = \frac{4,0 \times 10^{13}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ см}; \quad (6.72)$$

4. Масса M невращающегося жидкого коллапсара пропорциональна его физическому радиусу a (6.14)

$$M = \frac{4\pi a}{\kappa} = 6,8 \times 10^{27} a \text{ грамм}, \quad (6.73)$$

и обратно пропорциональна квадратному корню из его плотности ρ_0 (6.15)

$$M = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\kappa^{3/2}\sqrt{\rho_0}} = \frac{2,7 \times 10^{41}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ грамм}; \quad (6.74)$$

5. Наблюдаемая Вселенная полностью находится внутри своего радиуса коллапса. Другими словами, Вселенная — гравитационный коллапсар: все звёзды и галактики, включая нас самих,

существуют внутри огромной чёрной дыры. Её параметры, рассчитанные по жидкостной модели, равны

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ \rho_0 &= 9,6 \times 10^{-31} \text{ грамм/см}^3 \\ M &= 8,8 \times 10^{55} \text{ грамм} \end{aligned} \right\}; \quad (6.75)$$

6. Жидкость, заполняющая коллапсары, находится в состоянии инфляции

$$p = -\rho_0 c^2 = \text{const}, \quad (6.76)$$

т.е. при положительной плотности вещества давление отрицательно, поэтому внутреннее давление пытается расширить тело изнутри (но коллапсар не расширяется, так как жидкое тело несжимаемо). Давление и плотность остаются неизменными от центра коллапсара до его поверхности;

7. Гравитационно-инерциальная сила, действующая внутри невращающегося жидкого коллапсара, — это сила отталкивания. Она увеличивается с расстоянием от нуля в центре коллапсара до предельно высокого значения на поверхности;
8. Внутренняя сила отталкивания вызывает квадратичное (параболическое) красное смещение фотонов, движущихся внутри коллапсара;
9. Состояние жидкого вещества, заполняющего обычные (компактные) коллапсары, аналогично состоянию физического вакуума высокой плотности (λ -поля высокой плотности), который представляет собой однородную невязкую неизлучающую среду в состоянии инфляции;
10. Наблюдаемое время течёт в противоположных направлениях внутри и снаружи коллапсаров: если принять, что наблюдаемое время нашего мира течёт из прошлого в будущее, то наблюдаемое время внутри коллапсаров течёт из будущего в прошлое;
11. Состояние гравитационного коллапса представляет собой “мост”, соединяющий мир переменной четырёхмерной отрицательной кривизны внутри обычных звёзд и мир четырёхмерной положительной постоянной кривизны внутри гравитационных коллапсаров (чёрных дыр);

12. Вращающиеся жидкие коллапсары не являются сферами, а имеют *эллиптическую форму*, уплощенную в экваториальной плоскости. Радиус r_c вращающегося жидкого коллапсара формулируется через радиус сферы a , широту θ и угловую скорость её вращения ω как

$$r_c = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{4\omega^2 a^2 \cos^2 \theta}{c^2}}}. \quad (6.77)$$

Литература

1. Eddington A. S. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, Cambridge, 1926.
Краткое изложение на русском опубликовано в статье: Эддингтон А. Внутреннее строение звёзд. *Успехи физических наук*, 1924, том 4, № 1, 11–28.
2. Bethe H. A. Energy production in stars. *Physical Review*, 1939, vol. 55, no. 5, 434–456.
3. Milne E. A. The analysis of stellar structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1930, vol. 91, no. 1, 4–55.
4. Козырев Н. А. Источники звёздной энергии и теория внутреннего строения звёзд. Часть I. *Известия Крымской астрофизической обсерватории*, 1948, том 2, 3–43; Часть II, *ibid.*, 1951, том 6, 54–83.
English translation: Kozyrev N. A. Sources of stellar energy and the theory of the internal constitution of stars. *Progress in Physics*, 2005, vol. 1, no. 3, 61–99.
5. Jeans J. H. Recent developments of cosmical physics. *Nature*, December 4, 1926, vol. 118, no. 2979, 29–40 (in the *Supplement* to the issue).
6. Jeans J. H. *Astronomy and Cosmogony*. Cambridge University Press, Cambridge, 1928.
7. Robitaille P.-M. A high temperature liquid plasma model of the Sun. *Progress in Physics*, 2007, vol. 3, no. 1, 70–81.
8. Robitaille P.-M. A thermodynamic history of the solar constitution — I: the journey to a gaseous sun. *Progress in Physics*, 2011, vol. 7, no. 3, 3–25.
9. Robitaille P.-M. A thermodynamic history of the solar constitution — II: the theory of a gaseous sun and Jeans' failed liquid alternative. *Progress in Physics*, 2011, vol. 7, no. 3, 41–59.
10. Robitaille P.-M. Forty lines of evidence for condensed matter — the Sun on trial: liquid metallic hydrogen as a Solar building block. *Progress in Physics*, 2013, vol. 9, no. 4, 90–142.
11. Borissova L. The gravitational field of a condensed matter model of the Sun: the space breaking meets the Asteroid strip. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 224–260.

12. Borissova L. The Solar System according to General Relativity: the Sun's space breaking meets the Asteroid strip. *Progress in Physics*, 2010, vol. 6, no. 2, 43–47.
13. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, 189–196.
English translation: Schwarzschild K. On the gravitational field of a point mass according to Einstein's theory. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 10–19.
14. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, 424–435.
English translation: Schwarzschild K. On the gravitational field of a sphere of incompressible liquid, according to Einstein's theory. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 20–32.
15. Hilbert D. Die Grundlagen der Physik. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1917, 53–76.
16. De Sitter W. On the curvature of space. *Koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen, Proceedings*, 1918, vol. XX, part I, no. 2, 229–243.
17. Borissova L. De Sitter bubble as a model of the observable Universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2010, vol. 3, 3–24.
18. Борисова Л. и Рабунский Д. Поля, вакуум и зеркальная вселенная. Перевод с 3-го, переработанного английского издания, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.
Издания на русском языке опубликованы в 1999, 2010, 2023; на английском — в 2001, 2009, 2023; на французском — в 2010, 2023.
Оригинальное издание: Borissova L. and Rabounski D. *Fields, Vacuum, and the Mirror Universe*. The 3rd revised edition, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.
Перевод на французский: Rabounski D. et Borissova L. *Champs, vide, et Univers miroir*. La 2ème édition révisée, *New Scientific Frontiers*, Londres, 2023.
19. Рабунский Д. и Борисова Л. Частицы здесь и за зеркалом. Перевод с 4-го, переработанного английского издания, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.
Издания на английском опубликованы в 2001, 2008, 2012, 2023; на французском — в 2010, 2023.
Оригинальное издание: Rabounski D and Borissova L. *Particles Here and Beyond the Mirror*. The 4th revised edition, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.

- Перевод на французский: Rabounski D. et Borissova L. Particules de l'Univers et au delà du miroir. La 2ème édition révisée, New Scientific Frontiers, Londres, 2023.
20. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Гос. изд-во теоретико-технической литературы, Москва, 1939 (ссылки на разделы даны из последнего 6-го русского издания, вдвое расширенного по сравнению с 1-м изданием, Наука, Москва, 1973).
English translation: Landau L. D. and Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, 1951 (section references are given from the final 4th English edition, expanded twice from the 1st edition, Butterworth-Heinemann, 1979).
 21. Зельманов А. Л. Хронометрические инварианты. Канд. диссертация 1944 года. American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2006.
English translation: Zelmanov A. L. Chronometric Invariants. Translated from the 1944 PhD thesis, American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2006.
 22. Зельманов А. Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие системы отсчёта в общей теории относительности. *Доклады АН СССР*, 1956, том 107, № 6, 815–818.
English translation: Zelmanov A. L. Chronometric invariants and accompanying frames of reference in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, 1956, vol. 1, 227–230.
 23. Зельманов А. Л. К релятивистской теории анизотропной неоднородной вселенной. В сб.: *Труды 6-го совещания по вопросам космогонии*, проходившего в 1957 г., Изд-во АН СССР, Москва, 1959, 144–174.
English translation: Zelmanov A. L. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 33–63.
 24. Hafele J. C. Relativistic behaviour of moving terrestrial clocks. *Nature*, July 18, 1970, vol. 227, 270–271.
 25. Hafele J. Performance and results of portable clocks in aircraft. PTTI 3rd Annual Meeting, November 16–18, 1971, 261–288.
 26. Hafele J. C. Relativistic time for terrestrial circumnavigations. *American Journal of Physics*, 1972, vol. 40, 81–85.
 27. Hafele J. and Keating R. Around the world atomic clocks: predicted relativistic time gains. *Science*, July 14, 1972, vol. 177, 166–168.
 28. Hafele J. and Keating R. Around the world atomic clocks: observed relativistic time gains. *Science*, July 14, 1972, vol. 177, 168–170.
 29. Demonstrating relativity by flying atomic clocks. *Metromnia*, the UK's National Measurement Laboratory Newsletter, issue 18, Spring 2005.

30. Schouten J. A. und Struik D. J. Einführung in die neuen Methoden der Differentialgeometrie. Noordhoff, Groningen, 1938.
First published in *Zentralblatt für Mathematik*, 1935, Bd. 11 und Bd. 19.
 31. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1951.
Оригинальное издание: Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, S. Hirzel Verlag, Leipzig 1942.
 32. Hessels J. W. T., Ransom S. M., Stairs I. H., Freire P. C., Kaspi V. M., Camilo F. A radio pulsar spinning at 716 Hz. *Science*, March 31, 2006, vol. 311, no. 5769, 1901–1904.
 33. Станюкович К. П. К вопросу о существовании устойчивых частиц в метagalактике. В сб.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, выпуск 1, Атомиздат, Москва, 1966, 267–279.
English translation: Stanyukovich K. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 99–110.
-

Изображение на обложке: фотография Солнца, сделанная SDO/NASA. Представлено SDO/NASA и научными группами AIA, EVE и HMI. Изображения и фильмы SDO не защищены авторским правом, если не указано иное: использование изображений SDO в некоммерческих целях, а также в образовательных и информационных целях настоятельно рекомендуется и не требует явного разрешения. Подробнее см. <http://sdo.gsfc.nasa.gov/data/rules.php>

Изображение на титульном листе: загадочная гравюра на дереве неизвестного средневекового художника. Её называют *гравюра Фламариона*, так как она воспроизведена на стр. 163 книги Камилла Фламариона *L'Atmosphère: Météorologie populaire* (Париж, 1888 г.), излагающей метеорологию для широкой аудитории. На этой гравюре по дереву изображён человек, вглядывающийся сквозь атмосферу Земли, как если бы это был занавес, позволяющий заглянуть внутрь Вселенной. Подпись к гравюре гласит: “Un Missionnaire du moyen âge raconte qu’il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent. . .”, что переводится как “Средневековый миссионер рассказывает, что он нашел точку, где встречаются небеса [в смысле “небо”] и Земля. . .”

Формат книги: 60 × 90 1/16
Гарнитура: Tempora TLF
Основной кегль: 11 пт
Опечатки исправлены: 20.12.2023

Внутри звёзд

Теория внутреннего строения звёзд
и источников звёздной энергии
на основе общей теории относительности

Л. Борисова и Д. Рабунский

Первое издание на русском языке,
переведённое с 3-го, переработанного
английского издания

New Scientific Frontiers
London, 2023

